MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG VON

E. KAMKE
TÜBINGEN

R. NEVANLINNA
HELSINKI

E. SCHMIDT
BERLIN

F. K. SCHMIDT
MÜNSTER

H. WIELANDT
MAINZ

HERAUSGEGEBEN VON

K. KNOPP
TÜBINGEN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT:

W. BLASCHKE L. FEJÉR G. HERGLOTZ
A. E. INGHAM H. KNESER O. PERRON
W. SÜSS H. WEYL

53. BAND 5. (SCHLUSS-)HEFT

(ABGESCHLOSSEN AM 19. DEZEMBER 1950)

BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
SPRINGER-VERLAG
1951

Math.
Z.

Die **MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT**

erscheint nach Maßgabe des eingehenden Materials. Der Preis des Bandes beträgt DM 96.—

Die Mathematische Zeitschrift ist durch jede Buchhandlung zu beziehen.

Die Mathematische Zeitschrift dient der Pflege der reinen Mathematik, doch werden auch Beiträge aus den Gebieten der theoretischen Physik und Astronomie Aufnahme finden, soweit sie mathematisch von Interesse sind. Besprechungen, Aufgaben u. dgl. werden nicht zugelassen.

Es wird ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht, daß mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder an den Verlag übergeht, und zwar bis zum 31. Dezember desjenigen Kalenderjahres, das auf das Jahr des Erscheinens folgt. Hieraus ergibt sich, daß grundsätzlich nur Arbeiten angenommen werden können, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind, und die auch nachträglich nicht anderweitig zu veröffentlichen der Autor sich verpflichtet.

Die Mitarbeiter erhalten von ihren Arbeiten 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Manuskriptsendungen sind zu richten an die Mitglieder der unterzeichneten Redaktion. Die Herren Mitarbeiter werden im Interesse einer raschen Drucklegung gebeten, die Arbeiten in gut lesbarer Niederschrift einzureichen. Für den Text ist, wenn irgend möglich, Maschinenschrift, für die mathematischen Formeln jedoch nur Handschrift zu verwenden. Etwaige Abbildungen sind auf einem besonderen Blatt zu zeichnen. Die in den Formeln etwa vorkommenden griechischen oder deutschen Buchstaben (Fraktur) sind stets besonders (etwa mit einem farbigen Stift) zu kennzeichnen. Die Fußnoten sind fortlaufend zu numerieren, bei Zitaten Erscheinungsjahr und Seitenzahlen anzugeben.

Wenn zu einer bereits gedruckten Arbeit eine Berichtigung nötig wird, wollen die Herren Verfasser dem Herausgeber hiervon unverzüglich Mitteilung machen. Die Berichtigungen sollen dann am Schlusse eines Bandes gesammelt aufgenommen werden.

REDAKTION DER MATHEMATISCHEN ZEITSCHRIFT:

E. Kamke, Tübingen, Eßlinger Straße 16, **R. Nevanlinna,** Zürich/Schweiz, Hadlaubstraße 45
K. Knopp, Tübingen, Am Apfelberg 6, **E. Schmidt,** Berlin-Steglitz, Sedanstraße 8,
F. K. Schmidt, Münster/W., Schlaunstraße 4.

Geschäftsführender Herausgeber:
H. Wielandt, Mainz, Göttelmannstraße 2[1/2]

Springer-Verlag OHG — Berlin W 35, Reichpietschufer 20. — Heidelberg, Neuenheimer Landstraße 24. — Göttingen, Weender Straße 60.

Vertriebsvertretungen im Ausland: Schweiz: Lange, Maxwell & Springer A.G., Basel, Schützenmattstr. 43 — England, USA und übriges Ausland: Lange, Maxwell & Springer Ltd., 41—45 Neal Street, London W. C. 2.

53. Band. **Inhalt:** 5. Heft.

Seite

Ackermann, Dr. W., Lüdenscheid (Westf.), Lauerfelderstr. 22: Konstruktiver Aufbau eines Abschnitts der zweiten Cantorschen Zahlenklasse . . 403

Hermes, Dozent Dr. H., Münster (Westf.), Eugen-Müller-Str. 3: Zur Theorie der aussagenlogischen Matrizen 414

Neumer, Dr. W., Worms a. Rh., Talstr. 13: Einige Eigenschaften und Anwendungen der δ- und ε-Zahlen 419

Meyer-König, Dozent Dr. W., Stuttgart-S., Liststr. 51: Beziehungen zwischen einigen Matrizen der Limitierungstheorie 450

Rédei, Prof. Dr. L., Szeged (Ungarn), Math. Institut d. Universität: Über die Basen endlicher Gruppen 454

Pickert, Dr. G., Tübingen, Math. Institut d. Universität: Remaksche Zerlegungen für Gruppen mit Paarungen 456

Zeller, Dr. K., Tübingen, Math. Institut d. Universität: Allgemeine Eigenschaften von Limitierungsverfahren 463

Nachtrag 488

Unveränderter Nachdruck 1969 Springer-Verlag, Berlin / Heidelberg / New York
Fotodruck: Mikrokopie GmbH. · München 22 · Bruderstraße 9

Mathematische Zeitschrift, Band 53, Heft 5, S. 403—413 (1951).

Konstruktiver Aufbau eines Abschnitts der zweiten Cantorschen Zahlenklasse.

Von

Wilhelm Ackermann in Lüdenscheid (Westf.).

Mit der üblichen Bezeichnungsweise der transfiniten Ordnungszahlen mit Hilfe der Zeichen 1, ω, der für die Addition und die Potenzbildung, kommt man bekanntlich nur bis zu Ordnungszahlen, die kleiner als die erste transfinite Epsilonzahl sind, so daß für diese ein neues Zeichen eingeführt werden muß. Das wiederholt sich entsprechend für jede folgende Epsilonzahl. Zu einer Erweiterung der Bezeichnung gelangt man, wenn man die Epsilonzahlen durch ε_α kennzeichnet, wo α der Ordnungstyp der Reihe der vorangehenden Epsilonzahlen ist. Man kann dann alle Epsilonzahlen bezeichnen, die kleiner sind als die Epsilonzahl, die gewissermaßen ihr eigener Index ist. Diese Epsilonzahl müßte dann wieder durch ein neues Symbol charakterisiert werden. Für gewisse metamathematische Untersuchungen ist es nun von Vorteil, ein Bezeichnungssystem zu haben, das viel weiter in die zweite Zahlenklasse hineinführt. Dies wird im folgenden angegeben. Da es sehr einfach ist — es besteht nur aus den Zeichen 1, + und einer Klammer mit drei Leerstellen — dürfte es auch für sich ein gewisses Interesse beanspruchen. Dieses Bezeichnungssystem ließe sich übrigens leicht erweitern, wenn man nach Analogie der folgenden Vorschriften ein Klammerzeichen mit vier oder mehr Leerstellen einführen würde.

Ich lege nun Wert darauf — eben hinsichtlich etwaiger metamathematischer Anwendungen — daß der Aufbau der in Frage stehenden Ordnungszahlen in konstruktiver Weise erfolgt. Bedingungen für einen konstruktiven Aufbau eines Abschnitts der zweiten Zahlenklasse sind von A. Church und S. C. Kleene aufgestellt worden[1]). Die folgenden, dort als grundlegend angesehenen Bedingungen sind hier erfüllt: Jede vorkommende Ordnungszahl wird nur durch ein einziges Symbol bezeichnet. Für zwei Ordnungszahlen, die durch verschiedene Symbole bezeichnet werden, kann durch ein rekursives zahlentheoretisches Verfahren entschieden werden, welches die größere und welches die kleinere ist. Das Symbol für die erste Ordnungszahl ist bekannt.

[1]) A. Church. The constructive second number class. Bull. Am. Math. Soc. 44 (1938).

S. C. Kleene. On notation for ordinal numbers. Journ. Symb. Log. 3 (1938).

Für jede davon verschiedene kann festgestellt werden, ob sie einen unmittelbaren Vorgänger hat oder nicht. Im ersten Falle kann dieser angegeben werden. Im zweiten Falle kann eine durch zahlentheoretische Rekursion definierte Folge von Ordnungszahlen angegeben werden, deren Limes die gegebene Ordnungszahl ist. Außerdem kann für jede Ordnungszahl in konstruktiver Weise gezeigt werden, daß die transfinite Induktion bis dahin gilt.

Wir betrachten eine Menge von Symbolen, die folgendermaßen beschaffen ist: 1) 1 gehört zu dieser Menge; 2) Es gehören weiter zu dieser Menge die und nur die Symbole, die sich aus schon vorhandenen mit Hilfe der folgenden Regel gewinnen lassen: Mit den Symbolen α, β und γ gehören auch $\alpha + \beta$ und (α, β, γ) zu der Menge.

Symbole der Menge sind also z. B. $1, 1+1, (1,1,1), 1+(1,1,1)$, usw.

Wir definieren weiter zwischen zwei Symbolen eine Relation $<$, so daß für zwei vorgelegte Symbole α und β sich immer entscheiden läßt, ob $\alpha < \beta$ richtig oder falsch ist. Wir definieren $<$ durch Rekursion, indem wir die Gültigkeit von $\alpha < \beta$ auf die von endlich vielen $\alpha_i < \beta_i$ zurückführen, wo jedesmal α_i und β_i zusammen weniger Plus- und Klammerzeichen enthalten als α und β zusammen; oder aber es wird über die Gültigkeit von $\alpha < \beta$ direkt etwas ausgemacht.

Wir bemerken zunächst, daß jedes Symbol 1 ist oder die Form (α, β, γ) hat oder die Form $\pi_1 + \pi_2 + \cdots + \pi_m$, wo die π Symbole der vorigen Art sind. Zur Abkürzung bezeichnen wir im folgenden mit π, ϱ, σ Symbole der Form 1 oder (α, β, γ), mit α, β, γ beliebige Symbole. $\alpha = \beta$ soll bedeuten, daß α und β das gleiche Symbol sind, $\alpha \neq \beta$, daß α und β verschiedene Symbole sind. Für die Definition von $<$ haben wir die folgenden Vorschriften:

G 1) $\alpha < 1$ ist immer falsch.

G 2) $1 < \alpha$, wo $\alpha \neq 1$, ist immer richtig.

G 3) $\pi_1 + \cdots + \pi_m < \pi_1 + \cdots + \pi_m + \pi_{m+1} + \cdots + \pi_{m+k}$ ist richtig ($m \geqq 1$; $k \geqq 1$).

G 4) $\pi_1 + \cdots + \pi_m + \pi_{m+1} + \cdots + \pi_{m+k} < \pi_1 + \cdots + \pi_m$ ist falsch ($m \geqq 1$; $k \geqq 0$).

G 5) $\pi_1 + \cdots + \pi_m + \varrho_1 + \cdots + \varrho_k < \pi_1 + \cdots + \pi_m + \sigma_1 + \cdots + \sigma_l$, wo $\varrho_1 \neq \sigma_1$, ist richtig, falls $\varrho_1 < \sigma_1$ richtig und falsch, falls $\varrho_1 < \sigma_1$ falsch ($m \geqq 0$).

G 6) $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) < (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ ist richtig, falls einer der folgenden Fälle vorliegt:

a) $\alpha_1 = \alpha_2$ und $\beta_1 = \beta_2$ und $\gamma_1 < \gamma_2$ sind richtig;

b) $\alpha_1 = \alpha_2$ und $\beta_1 < \beta_2$ und $\gamma_1 < (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ sind richtig;

c) $\alpha_1 = \alpha_2$ und $\beta_2 < \beta_1$ und $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) < \gamma_2$ sind richtig;

d) $\alpha_1 = \alpha_2$ und $\beta_2 < \beta_1$ und $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) = \gamma_2$ sind richtig;

e) $\alpha_1 < \alpha_2$ und $\beta_1 < (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ und $\gamma_1 < (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ sind richtig;

f) $\alpha_2 < \alpha_1$ und $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) < \beta_2$ sind richtig;

g) $\alpha_2 < \alpha_1$ und $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) = \beta_2$ sind richtig;
h) $\alpha_2 < \alpha_1$ und $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) < \gamma_2$ sind richtig;
i) $\alpha_2 < \alpha_1$ und $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) = \gamma_2$ sind richtig.

In allen übrigen Fällen ist $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) < (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ falsch.

Es ist also z. B. $1 < 1 + 1 + \cdots + 1$, $1 + 1 + \cdots + 1 < (1, 1, 1)$, $(1, 1, 1 + 1 + 1) < (1, 1 + 1, 1)$.

Wir definieren weiter, welche unserer Symbole *Ordnungszahlen* (kurz *O-Zahlen*) darstellen sollen. Dies geschieht wieder durch ein rekursives Verfahren, das nach der Gesamtzahl der in einem Symbol vorkommenden Plus- und Klammerzeichen geht. Wir haben die folgenden Regeln:

1) 1 ist O-Zahl.

2) $\pi_1 + \cdots + \pi_m$ ist dann und nur dann O-Zahl, falls $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_m$ alle O-Zahlen sind und $\pi_2 \leqq \pi_1, \ldots, \pi_m \leqq \pi_{m-1}$.

3) (α, β, γ) ist dann und nur dann O-Zahl, falls α, β und γ O-Zahlen sind.

Man zeigt z. B., daß $1, 1 + 1, 1 + 1 + 1, \ldots, (1, 1, 1)$ O-Zahlen sind. Statt $1 + 1, 1 + 1 + 1, \ldots$ gebrauchen wir auch die Abkürzungen $2, 3, \ldots$. Ebenso zeigt man, daß $(1, 2, 1) + (1, 1, 3)$ O-Zahl ist, nicht aber $(1, 1, 3) + (1, 2, 1)$. In Zukunft bezeichnen wir mit den griechischen Buchstaben immer O-Zahlen.

Wir haben nun zu zeigen, daß die Relation $<$ die für eine Ordnungsbeziehung charakteristischen Eigenschaften besitzt.

I. $\alpha < \alpha$ ist immer falsch.

Das ergibt sich, wenn wir wieder eine Rekursion der oben genannten Art vornehmen, mit Hilfe von G 1, G 4 und G 6.

II. Ist $\alpha \neq \beta$ und $\alpha < \beta$ richtig, so ist $\beta < \alpha$ falsch. Wir nehmen wieder an, der Satz sei schon gezeigt, falls α und β zusammen weniger Plus- und Klammerzeichen enthalten. Die Richtigkeit von $\alpha < \beta$ ergibt sich nach G 2, G 3, G 5 oder G 6. Die Falschheit von $\beta < \alpha$ ergibt sich in den ersten drei Fällen nach G 1, G 4 oder G 5, wobei bei G 5 die Voraussetzung benutzt werden muß. Lag für $\alpha < \beta$ einer der Fälle G 6 a—i vor, so zeigt man unter Benutzung von Satz I und der Voraussetzung, daß für $\beta < \alpha$ keiner dieser Fälle vorliegt.

III. Ist $\alpha \neq \beta$ richtig und $\alpha < \beta$ falsch, so ist $\beta < \alpha$ richtig.

Auch hier beweisen wir den Satz durch die gleiche Rekursion bezüglich α und β. Die Falschheit von $\alpha < \beta$ ergibt sich entweder nach G 1, G 4 oder G 5; die Richtigkeit von $\beta < \alpha$ dann nach G 2, G 3 oder G 5, im letzten Falle unter Ausnutzung der Voraussetzung. Oder die Falschheit von $\alpha < \beta$ ergibt sich dadurch, daß keiner der Fälle G 6 a—i vorliegt. Indem wir Satz I und II und die Voraussetzung benutzen, ergibt sich, daß $\beta < \alpha$ richtig sein muß.

IV. Ist $\alpha < \beta$ und $\beta < \gamma$ richtig, so auch $\alpha < \gamma$.

Da $\beta < \gamma$ richtig ist, ist nach G 1 jedenfalls $\gamma \neq 1$; aus dem gleichen Grunde ist $\beta \neq 1$. Wir beweisen den Satz durch Rekursion nach der Anzahl der in α, β und γ insgesamt vorkommenden Plus- und Klammerzeichen.

A) Es sei $\alpha = (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, $\beta = (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$, $\gamma = (\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)$. Für die Richtigkeit von $\alpha < \beta$ und $\beta < \gamma$ kommen alle Paarkombinationen der Fälle G 6 a—i in Frage. Jedesmal können wir dann unter Benutzung der Voraussetzung zeigen, daß für $\alpha < \gamma$ einer der Fälle G 6 a—i vorliegt. Es ergebe sich z. B. die Richtigkeit von $\alpha < \beta$ nach G 6 b, die von $\beta < \gamma$ nach G 6 c. Es ist dann

$$\alpha_1 = \alpha_2,\ \beta_1 < \beta_2,\ \gamma_1 < (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2),\ \alpha_2 = \alpha_3,\ \beta_2 < \beta_3,\ (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2) < \gamma_3.$$

Nach Voraussetzung ergibt sich $\gamma_1 < \gamma_3$, $\gamma_1 < (\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)$ und $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) < \gamma_3$. Nach Satz I, II und III ist entweder $\beta_1 = \beta_3$ oder $\beta_1 < \beta_3$ oder $\beta_3 < \beta_1$. Ist $\beta_1 = \beta_3$, so ist $\alpha < \gamma$ nach G 6 a. Ist $\beta_1 < \beta_3$, so ergibt sich die Behauptung nach G 6 b. Ist $\beta_3 < \beta_1$, so ergibt sich die Behauptung nach G 6 c. In ähnlicher Weise lassen sich alle anderen Fälle behandeln. Die umfangreiche Aufzählung wollen wir hier nicht vornehmen, sondern die Nachprüfung dem Leser überlassen.

B) Ist $\alpha = 1$, so ist $1 < \gamma$, da $\gamma \neq 1$.

C) Es sei $\alpha = \pi_1 + \cdots + \pi_m$, $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$. Hier kann sich $\alpha < \beta$ nur nach G 5 ergeben, also ist $\pi_1 < \beta$, nach Voraussetzung $\pi_1 < \gamma$ und nach G 5 $\alpha < \gamma$.

D) Es sei $\alpha = \pi_1 + \cdots + \pi_m$; $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, $\gamma = \varrho_1 + \cdots + \varrho_n$. Hier ist $\pi_1 < \beta$ und $\beta \leqq \varrho_1$, nach Voraussetzung also $\pi_1 < \varrho_1$, nach G 5 also $\alpha < \gamma$.

E) Es sei $\alpha = \pi_1 + \cdots + \pi_m$, $\beta = \varrho_1 + \cdots + \varrho_n$, $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$. Hier ist $\varrho_1 < \gamma$, ferner $\pi_1 \leqq \varrho_1$, nach Voraussetzung also $\pi_1 < \gamma$ und nach G 5 $\alpha < \gamma$.

F) Es sei $\alpha = \pi_1 + \cdots + \pi_m$, $\beta = \varrho_1 + \cdots + \varrho_n$, $\gamma = \sigma_1 + \cdots + \sigma_k$. Es sei i der kleinste Index, so daß $\pi_i, \varrho_i, \sigma_i$ nicht alle gleich sind oder nicht alle existieren. Existiert eines der $\pi_i, \varrho_i, \sigma_i$ nicht, so kann das nur π_i sein. Nach G 3 ist dann $\alpha < \gamma$. Existieren alle drei, so ist $\pi_i \leqq \varrho_i$ und $\varrho_i \leqq \sigma_i$, ferner $\pi_i < \varrho_i$ oder $\varrho_i < \sigma_i$. Nach Voraussetzung ist dann $\pi_i < \sigma_i$ also nach G 5 $\alpha < \gamma$.

G) Falls $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2\ \alpha_3)$, aber nicht der Fall A) vorliegt, zeigen wir die Richtigkeit der Behauptung wie bei C)—F).

Wir beweisen noch zwei Sätze, die wir später brauchen werden.

V. Ist $\delta \leqq \beta$ oder $\delta \leqq \gamma$, so ist $\delta < (\alpha, \beta, \gamma)$.

Wir beweisen den Satz, jedesmal für alle α, β und γ, durch Induktion nach der Anzahl der in δ vorkommenden Plus- und Klammerzeichen. Ist diese 0, so ist $\delta = 1$ und die Behauptung nach G 2 richtig. Ist $\delta = \pi_1 + \cdots + \pi_m$, so ist, falls $\delta \leqq \beta$, $\pi_1 < \beta$ und nach Voraussetzung $\pi_1 < (\alpha, \beta, \gamma)$, nach G 5 $\delta < (\alpha, \beta, \gamma)$. Entsprechend ist es, falls $\delta \leqq \gamma$. Ist $\delta = (\delta_1, \delta_2, \delta_3)$ und $\delta \leqq \beta$, so ist nach Voraussetzung $\delta_2 < \delta$ und $\delta_3 < \delta$, also auch $\delta_2 < \beta$ und $\delta_3 < \beta$, weiter nach Voraussetzung $\delta_2 < (\alpha, \beta, \gamma)$

und $\delta_3 < (\alpha, \beta, \gamma)$. Ist nun $\delta_1 = \alpha$, so ist $\delta < (\alpha, \beta, \gamma)$ nach G 6 b. Ist $\delta_1 < \alpha$, so ist $\delta < (\alpha, \beta, \gamma)$ nach G 6 e. Ist $\alpha < \delta_1$, so ist $\delta < (\alpha, \beta, \gamma)$ nach G 6 f oder G 6 g. Ist $\delta \leqq \gamma$ und $\delta = (\delta_1, \delta_2, \delta_3)$, so schließt man entsprechend.

VI. Falls $\delta \leqq \alpha$, ist $\delta < (\alpha, \beta, \gamma)$.

Wir beweisen den Satz wieder, jedesmal für alle α, β und γ, durch Induktion nach der Anzahl der in δ vorkommenden Plus- und Klammerzeichen. Ist $\delta = 1$, so ist er richtig. Ist $\delta = \pi_1 + \cdots + \pi_m$, so ist, falls $\delta \leqq \alpha$, $\pi_1 < \alpha$ und nach Voraussetzung $\pi_1 < (\alpha, \beta, \gamma)$. Nach G 5 ist dann $\delta < (\alpha, \beta, \gamma)$. Ist $\delta = (\delta_1, \delta_2, \delta_3)$, so ist nach Satz V $\delta_2 < \delta$ und $\delta_3 < \delta$, also wegen $\delta \leqq \alpha$ nach Voraussetzung $\delta_3 < (\alpha, \beta, \gamma)$ und $\delta_3 < (\alpha, \beta, \gamma)$. Ferner ist nach Voraussetzung $\delta_1 < \delta$, also auch $\delta_1 < \alpha$. Nach G 6 e ist dann $\delta < (\alpha, \beta, \gamma)$.

Wir haben nun zu zeigen, daß die O-Zahlen wirklich Ordnungszahlen sind, oder mit anderen Worten, daß wir *transfinite Induktionsschlüsse* anwenden dürfen.

Um die folgenden Überlegungen textlich nicht so schwierig zu gestalten, empfiehlt sich die Einführung der folgenden Symbole, mit denen wir aber nur inhaltliche Sachverhalte kurz ausdrücken. Diese Symbole sind: $\mathfrak{A}(\alpha)$, „die Eigenschaft $\mathfrak{A}$ trifft auf α zu", $\mathfrak{R}_x(\alpha, \mathfrak{A}(x))$, „für alle O-Zahlen, die kleiner als α sind, trifft die Eigenschaft $\mathfrak{A}$ zu", $\mathfrak{B}_x(\alpha, \mathfrak{A}(x))$ „mit $\mathfrak{R}_x(\beta, \mathfrak{A}(x))$ soll auch immer $\mathfrak{A}(\beta)$ der Fall sein, soweit $\beta \leqq \alpha$". Es kann nun sein, daß sich aus den Voraussetzungen $\mathfrak{A}(1)$ und $\mathfrak{B}_x(\alpha, \mathfrak{A}(x))$ durch konstruktive Schlüsse $\mathfrak{R}_x(\alpha + 1, \mathfrak{A}(x))$ ableiten läßt, ohne daß sonst etwas über $\mathfrak{A}$ vorausgesetzt wird. Wir würden dann zunächst sagen, die Zahl α ist durch $\mathfrak{A}$ erreichbar. Ist nun eine O-Zahl α durch $\mathfrak{A}$ erreichbar, so ist sie auch durch irgend eine andere Eigenschaft $\mathfrak{B}$ erreichbar. Denn da wir ja über $\mathfrak{A}$ bei der Ableitung von $\mathfrak{R}_x(\alpha + 1, \mathfrak{A}(x))$ nichts vorausgesetzt hatten, außer daß $\mathfrak{A}(1)$ und $\mathfrak{B}_x(\alpha, \mathfrak{A}(x))$ der Fall sein soll, so brauchen wir nur in den Schlüssen, die von $\mathfrak{A}(1)$ und $\mathfrak{B}_x(\alpha, \mathfrak{A}(x))$ zu $\mathfrak{R}_x(\alpha + 1, \mathfrak{A}(x))$ führen, überall $\mathfrak{A}$ durch $\mathfrak{B}$ zu ersetzen. Wir können demnach, statt zu sagen, α ist durch $\mathfrak{A}$ erreichbar, einfach sagen, α ist erreichbar. Es könnte nun so scheinen, daß die Erreichbarkeit durch eine Allgemeinheitsbehauptung über Prädikate definiert ist. Das ist aber nicht unsere Auffassung. Wir wollen die Erreichbarkeit einer Zahl α als eine gewisse anschauliche Tatsache auffassen, nämlich eben als das Vorhandensein eines bestimmten Systems von Schlüssen, das von $\mathfrak{A}(1)$ und $\mathfrak{B}_x(\alpha, \mathfrak{A}(x))$ zu $\mathfrak{R}_x(\alpha + 1, \mathfrak{A}(x))$ führt. Zu diesen Schlüssen sollen alle Schlüsse der sogenannten positiven Logik gehören, ferner auch der zahlentheoretische Induktionsschluß und das entsprechende Operieren mit den Allzeichen für Zahlenvariable und mit den Allzeichen für O-Zahlen, wie es etwa der intuitionistischen Zahlentheorie entsprechen würde. Wir wollen diese Schlüsse hier nicht im einzelnen angeben, da der folgende Beweis erkennen läßt, welche gebraucht werden. Wir bemerken nur, daß auch

der folgende Schluß gebraucht wird: Läßt sich eine Behauptung für jede konkrete O-Zahl ableiten, so soll auch die entsprechende allgemeine Behauptung ableitbar sein[2]). Zu dem Gebrauch der Allgemeinheitszeichen für O-Zahlen bemerken wir, daß die O-Zahlen ja eine genau definierte, sich konstruktiv aufbauende und abzählbare Menge darstellen, so daß der Gebrauch eines Allzeichens für O-Zahlen in der gleichen Weise legitimiert ist, wie der des Allzeichens für natürliche Zahlen. Es darf uns auch nicht stutzig machen, daß von den beiden Voraussetzungen $\mathfrak{A}(1)$ und $\mathfrak{B}_x(a, \mathfrak{A}(x))$ die eine selbst eine allgemeine Behauptung darstellt. Derartige allgemeine Behauptungen können durchaus in konstruktiver Weise als richtig erkannt sein, was wir also mit voraussetzen. Im ganzen werden wir also die Behauptung, daß eine O-Zahl erreichbar ist, als eine durchaus vernünftige Behauptung ansehen, die wir auch in hypothetischer Weise verwenden. Natürlich ist die Erreichbarkeit, wenigstens zunächst, kein entscheidungsdefiniter Begriff; wir dürfen also nicht sagen, daß eine O-Zahl entweder erreichbar ist oder nicht.

Unsere Behauptung lautet nun: *Alle O-Zahlen sind erreichbar.*

Wir beweisen zunächst verschiedene Sätze über die Erreichbarkeit und sonstige Hilfssätze.

TI. 1 ist erreichbar.

TII. Ist α erreichbar, so auch alle Zahlen, die kleiner als α sind.

TIII. Sind alle O-Zahlen erreichbar, die kleiner als α sind, so ist α erreichbar.

Diese Sätze ergeben sich sofort aus der Definition der Erreichbarkeit, wobei bei Satz III der oben erwähnte besondere Schluß benutzt werden muß.

TIV. Ist α erreichbar, so auch $\alpha + 1$.

Nach G 3 und G 5 ist jede O-Zahl, die kleiner als $\alpha + 1$, auch $\leqq \alpha$.

TV. Die Zahl $\alpha = \pi_1 + \ldots + \pi_m$ sei erreichbar und $\beta \leqq \pi_m$. Dann ist auch $\pi_1 + \ldots + \pi_m + \beta$ erreichbar.

Nach TII ist β erreichbar. Die Erreichbarkeit von β bedeutet, daß eine transfinite Induktion bis β gestattet ist, da ja aus $\mathfrak{A}(1)$ und $\mathfrak{A}_x(\beta, \mathfrak{A}(x))$ immer $\mathfrak{A}_x(\beta + 1, \mathfrak{A}(x))$ ableitbar ist. Der Satz ist nun nach TIV richtig für $\beta = 1$. Er möge für alle β gelten, die kleiner als δ sind ($\delta \leqq \pi_m$). Nun ist nach G 3 und G 5 jede Zahl $< \alpha + \delta$ entweder $\leqq \alpha$ oder $\leqq \alpha + \gamma$, wo $\gamma < \delta$, also jedenfalls erreichbar. Nach TIII ist der Satz dann auch richtig für $\beta = \delta$. Da also die Voraussetzungen für die Anwendung der transfiniten Induktion zutreffen, ist der Satz damit bewiesen.

[2]) Dieser Schluß erscheint vom inhaltlichen Standpunkt aus selbstverständlich. Innerhalb eines logistischen Systems ist er zuerst von P. Lorenzen angewandt worden. Vgl. P. Lorenzen, Die Widerspruchsfreiheit der verzweigten Typenlogik (im Erscheinen begriffen im Journal of Symbolic Logic).

TVI. Ist π_1 erreichbar, so auch jede Zahl $\pi_1 + \ldots + \pi_m$. Dies ergibt sich aus TV durch Anwendung einer gewöhnlichen Induktion.

TVII. Jede Zahl der Form $1 + 1 + \ldots + 1$ ist erreichbar. Das ergibt sich aus TI und TVI.

TVIII (1, 1, 1) ist erreichbar.

Jede Zahl, die $< (1, 1, 1)$, hat nach G 1 — G 6 entweder die Form 1 oder $1 + 1 + \ldots + 1$.

Für das Folgende merken wir uns: Wollen wir zeigen, daß eine O-Zahl der Form (α, β, γ) erreichbar ist, so brauchen wir nur zu zeigen, daß alle O-Zahlen $< (\alpha, \beta, \gamma)$ erreichbar sind, die ebenfalls eine Form $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ haben. Das ergibt sich aus TVI und TI.

TIX. α, β und γ seien irgendwelche O-Zahlen, β und γ erreichbar. Es sei $\alpha = 1$, oder es sei, falls $\alpha_1 < \alpha$ und λ und μ erreichbar sind, immer (α_1, λ, μ) erreichbar. Es sei ferner $\beta = 1$ oder es sei, falls $\beta_1 < \beta$ und μ erreichbar ist, immer (α, β_1, μ) erreichbar. Endlich sei $\gamma = 1$ oder sonst sei, falls $\gamma_1 < \gamma$, immer $(\alpha, \beta, \gamma_1)$ erreichbar. Dann ist (α, β, γ) erreichbar.

Ist nämlich $(\delta_1, \delta_2, \delta_3) < (\alpha, \beta, \gamma)$, so liegt nach G 6 einer der folgenden Fälle vor:

(1) $$\delta_1 = \alpha,\ \delta_2 = \beta,\ \delta_3 < \gamma;$$

(2) $$\delta_1 = \alpha,\ \delta_2 < \beta,\ \delta_3 < (\alpha, \beta, \gamma);$$

(3) $$\delta_1 < \alpha,\ \delta_2 < (\alpha, \beta, \gamma),\ \delta_3 < (\alpha, \beta, \gamma);$$

(4) $$(\delta_1, \delta_2, \delta_3) \leqq \beta \quad \text{oder} \quad (\delta_1, \delta_2, \delta_3) \leqq \gamma.$$

Wir zeigen, daß $(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$ erreichbar ist. In den Fällen (1) und (4) ergibt sich das sofort aus der Voraussetzung. Im Falle (2) und (3) zeigen wir das durch Induktion nach der Anzahl der in $(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$ vorhandenen Klammern. Ist diese Anzahl 1, so hat $(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$ die Form $(\alpha, \delta_2, 1)$ oder $(\alpha, \delta_2, 1 + 1 + \ldots + 1)$ mit $\delta_2 < \beta$, oder es sind δ_2 und δ_3 beide 1 oder $1 + \ldots + 1$ und $\delta_1 < \alpha$; $(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$ ist also nach TI, TVII und der Voraussetzung erreichbar. Es sei schon gezeigt, falls die Anzahl der Klammern k ist. Ist sie $k + 1$, so enthalten δ_3 bzw. δ_2 und δ_3 höchstens k Klammern, sind also erreichbar. Nach der Voraussetzung des Satzes ist dann auch $(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$ erreichbar.

TX. α, β und γ seien O-Zahlen, β und γ erreichbar. Es sei $\alpha = 1$ oder es sei, falls $\alpha_1 < \alpha$ und λ und μ erreichbar sind, immer (α_1, λ, μ) erreichbar. Es sei ferner $\beta = 1$ oder falls $\beta \neq 1$ und $\beta_1 < \beta$ und μ erreichbar ist, immer (α, β_1, μ) erreichbar. Dann ist (α, β, γ) erreichbar.

Da γ erreichbar ist, dürfen wir eine transfinite Induktion bis γ vornehmen. Nun ist $(\alpha, \beta, 1)$ nach TIX erreichbar. Sei ferner $(\alpha, \beta, \delta_1)$ erreichbar, falls $\delta_1 < \delta$ $(\delta \leqq \gamma)$. Da δ erreichbar ist, ist nach TIX auch (α, β, δ) erreichbar. Also ist (α, β, γ) erreichbar.

TXI. α und β seien O-Zahlen, β erreichbar. Es sei $\alpha = 1$ oder es sei, falls $\alpha_1 < \alpha$ und λ und μ erreichbar sind, immer (α_1, λ, μ) erreichbar. Dann ist für erreichbare γ auch immer (α, β, γ) erreichbar.

Da β erreichbar ist, können wir eine transfinite Induktion bis β vornehmen. Nach TX ist für erreichbare γ auch immer $(\alpha, 1, \gamma)$ erreichbar. Sei weiter für erreichbare γ und $\delta_1 < \delta$ $(\delta \leqq \beta)$ immer $(\alpha, \delta_1, \gamma)$ erreichbar. Nach TX ist dann für erreichbare γ immer (α, δ, γ) erreichbar. Also ist für erreichbare γ immer (α, β, γ) erreichbar.

TXII. α sei eine erreichbare O-Zahl. Dann ist für alle erreichbaren β und γ auch (α, β, γ) erreichbar.

Da α erreichbar ist, können wir eine transfinite Induktion bis α vornehmen. Nach TXI ist für alle erreichbaren β und γ auch $(1, \beta, \gamma)$ erreichbar. Sei für alle erreichbaren β und γ und $\delta_1 < \delta$ $(\delta \leqq \alpha)$ immer $(\delta_1, \beta, \gamma)$ erreichbar. Nach TXI ist dann für alle erreichbaren β und γ auch (δ, β, γ) erreichbar. Also ist (α, β, γ) erreichbar.

TXIII. Jede O-Zahl ist erreichbar.

Wir führen den Beweis durch Induktion nach der Anzahl der in einer O-Zahl α insgesamt vorkommenden Plus- und Klammerzeichen. Ist diese Anzahl 0, so ist $\alpha = 1$, also erreichbar. Die Richtigkeit der Behauptung sei schon gezeigt, falls weniger als n derartige Zeichen vorkommen. Hat nun α n Zeichen, so hat α entweder die Form $\pi_1 + \ldots + \pi_m$. Nach Voraussetzung ist π_1 erreichbar, nach TVI auch α. Oder α hat die Form $(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$. Nach Voraussetzung sind δ_1, δ_2 und δ_3 erreichbar, nach TXII auch $(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$.

Bei den metamathematischen Anwendungen wird der Satz von der Erreichbarkeit aller O-Zahlen nur in der folgenden Form benutzt: Geht man von einer O-Zahl α immer wieder zu kleineren O-Zahlen über, so kommt man nach endlich vielen Schritten zur 1. Dieser Satz folgt aus der Erreichbarkeit der O-Zahlen, da für die angegebene Eigenschaft $\mathfrak{A}$ von α $\mathfrak{A}(1)$ und $\mathfrak{B}_x(\alpha, \mathfrak{A}(x))$ richtig sind. Anscheinend läßt er sich nicht ohne weiteres direkt beweisen, d. h. nicht durch konstruktive Schlüsse.

Unter einer berechenbaren Funktion im Bereiche der O-Zahlen würden wir eine solche verstehen, deren Werte für eine vorgelegte O-Zahl sich auf die Werte der Funktion für endlich viele, effektiv angebbare kleinere O-Zahlen zurückführen läßt. Man kann dann natürlich eine zweite Funktion wieder mit Hilfe der ersten definieren und so fort. Aus dem oben angegebenen Satz folgt, daß man den Wert für eine vorgelegte O-Zahl wirklich angeben kann.

Wir wollen nun noch kurz angeben, wie man zu jeder O-Zahl, die nicht 1 ist und nicht die Form $\alpha + 1$ hat, eine Folge von O-Zahlen angeben kann, deren „Limes" die gegebene O-Zahl ist.

Es sei durch zahlentheoretische Rekursion eine Funktion $\varphi(n)$ definiert, deren Argumente natürliche Zahlen und deren Werte O-Zahlen sind. Wir sagen dann, die O-Zahl α ist der Limes der Folge $\varphi(n)$,

wenn folgendes der Fall ist: 1) Es ist für alle n $\varphi(n) < \alpha$; 2) für alle n ist $\varphi(n) < \varphi(n+1)$; 3) ist $\beta < \alpha$, so läßt sich ein n angeben, so daß $\beta \leqq \varphi(n)$.

Wir wollen nun zu jeder O-Zahl, die nicht 1 ist und nicht die Form $\alpha + 1$ hat, oder kurz gesagt, zu jeder „Limeszahl" eine *eindeutig* bestimmte Folge angeben, deren Limes sie ist.

Im folgenden sollen die Buchstaben λ und μ immer Limeszahlen, α, β, γ beliebige O-Zahlen, π eine Zahl der Form (α, β, γ) bedeuten. Bezeichnen wir die zu einer Limeszahl λ gehörige Folge mit $\varphi(n, \lambda)$! Wir geben für jede Form von λ eine Definition von $\varphi(n, \lambda)$. Bei diesen Definitionen haben wir, falls die Definition von $\varphi(n, \lambda)$ aus zwei Teilen besteht, im zweiten Teil statt $\varphi(n, \lambda)$ kurz $\varphi(n)$ geschrieben, während bei sonst vorkommenden $\varphi(n, \mu)$ das zweite Argument von φ nicht fortgelassen ist. Die Definitionen sehen folgendermaßen aus:

1) $\varphi(n, \alpha + \pi) = \alpha + \varphi(n, \pi)$

2) $\varphi(1, (1, 1, 1)) = 1$; $\varphi(n+1) = \varphi(n) + 1$

3) $\varphi(1, (1, 1, \gamma + 1)) = (1, 1, \gamma)$; $\varphi(n+1) = \varphi(n) + (1, 1, \gamma)$

4) $\varphi(1, (\alpha + 1, 1, 1)) = (\alpha, 1, 1)$; $\varphi(n+1) = (\alpha, \varphi(n), \varphi(n))$

5) $\varphi(n, (\lambda, 1, 1)) = (\varphi(n, \lambda), 1, 1)$

6) $\varphi(1, (\alpha, \beta + 1, 1)) = (\alpha, \beta, 1)$; $\varphi(n+1) = (\alpha, \beta, \varphi(n))$

7) $\varphi(1, (\alpha, \lambda, 1)) = \lambda$; $\varphi(n+1) = (\alpha, \varphi(n, \lambda), \varphi(n))$

8) $\varphi(1, (\alpha + 1, 1, \gamma + 1)) = (\alpha + 1, 1, \gamma)$; $\varphi(n+1) = (\alpha, \varphi(n), \varphi(n))$

9) $\varphi(1, (\lambda, 1, \gamma + 1)) = (\lambda, 1, \gamma)$; $\varphi(n+1) = (\varphi(n, \lambda), \varphi(n), \varphi(n))$

10) $\varphi(1, (\alpha, \beta + 1, \gamma + 1) = (\alpha, \beta + 1, \gamma)$; $\varphi(n+1) = (\alpha, \beta, \varphi(n))$

11) $\varphi(1, (\alpha, \lambda, \gamma + 1)) = (\alpha, \lambda, \gamma)$; $\varphi(n+1) = (\alpha, \varphi(n, \lambda), \varphi(n))$

12) Für den Fall, daß das zweite Argument von φ die Form (α, β, λ) hat, unterscheiden wir zwei Fälle:

a) λ hat nicht die Form $(\alpha, \beta_1, \gamma_1)$ mit $\beta < \beta_1$, und λ hat auch nicht die Form $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ mit $\alpha < \alpha_1$ und $\beta < \lambda$

b) λ hat eine dieser Formen.

12 a) $\varphi(n, (\alpha, \beta, \lambda)) = (\alpha, \beta, \varphi(n, \lambda))$

12 b 1) $\varphi(1, (1, 1, \lambda)) = \lambda$; $\varphi(n+1) = \varphi(n) + \lambda$

12 b 2) $\varphi(1, (\alpha + 1, 1, \lambda)) = \lambda$; $\varphi(n+1) = (\alpha, \varphi(n), \varphi(n))$

12 b 3) $\varphi(1, (\mu, 1, \lambda)) = \lambda$; $\varphi(n+1) = (\varphi(n, \mu), \varphi(n), \varphi(n))$

12 b 4) $\varphi(1, (\alpha, \beta + 1, \lambda)) = \lambda$; $\varphi(n+1) = (\alpha, \beta, \varphi(n))$

12 b 5) $\varphi(1, (\alpha, \mu, \lambda)) = \lambda$; $\varphi(n+1) = (\alpha, \varphi(n, \mu), \varphi(n))$.

Mit Hilfe dieser Definitionen läßt sich bei gegebenen n und α der Wert von $\varphi(n, \alpha)$ effektiv angeben. Denn zunächst erkennt man, daß jede Form von α gerade einmal erfaßt wird. Ferner wird der Wert

von $\varphi(n+1, \alpha)$ auf $\varphi(n, \alpha)$ und eventuell auf ein $\varphi(n, \beta)$ zurückgeführt, wo β insgesamt weniger Plus- und Klammerzeichen enthält als α.

Wir hätten nun zu zeigen, daß α der Limes der Folge $\varphi(n, \alpha)$ ist. Dieser Satz wird durch eine Rekursion nach der Anzahl der in α vorkommenden Plus- und Klammerzeichen bewiesen. Die Limeszahl mit der geringsten Zahl dieser Zeichen ist $(1, 1, 1)$. Die zugehörige Folge ist $1, 1+1, 1+1+1, \ldots$, so daß also $\varphi(n, \alpha) < \varphi(n+1, \alpha)$. Alle Zahlen der Folge sind ferner kleiner als $(1, 1, 1)$. Ist ferner $\beta < (1, 1, 1)$, so ist $\beta = 1$ oder hat die Form $1 + 1 + \cdots + 1$, so daß man direkt ein n angeben kann, so daß $\beta = \varphi(n, (1, 1, 1))$. Wir wollen den Beweis wegen des großen Umfangs der zu behandelnden Fälle nicht im einzelnen durchführen, zumal er keine besonderen Schwierigkeiten bietet. Zeigen wir nur an einem Fall, wie er verläuft. Wir wollen annehmen, daß α die der Definition 11) entsprechende Gestalt hat. α hat also die Form $(\beta, \lambda, \gamma+1)$. Hier ist $\varphi(1, \alpha) = (\beta, \lambda, \gamma)$, $\varphi(n+1, \alpha) = (\beta, \varphi(n, \lambda), \varphi(n, \alpha))$. Zeigen wir zunächst, daß $\varphi(n, \alpha) < \alpha$. Nach G 6a ist $\varphi(1, \alpha) < \alpha$. Ist $\varphi(n, \alpha) < \alpha$, so ergibt sich $\varphi(n+1, \alpha) < \alpha$ nach G 6b, da wir $\varphi(n, \lambda) < \lambda$ voraussetzen dürfen. Weiter zeigen wir, daß $\varphi(n, \alpha) < \varphi(n+1, \alpha)$. Das ergibt sich sofort aus dem früher bewiesenen Satz V. Endlich haben wir zu zeigen, daß wenn $\delta < \alpha$, wir ein n angeben können, so daß $\delta \leqq \varphi(n, \alpha)$. Wir beweisen dies durch Induktion nach der Anzahl der in δ vorkommenden Plus- und Klammerzeichen. Enthält δ kein derartiges Zeichen, so ist $\delta = 1$, also $\delta < \varphi(1, \alpha)$. Hat δ die Form $\pi_1 + \cdots + \pi_m$, so läßt sich nach Voraussetzung ein n angeben, so daß $\pi_1 \leqq \varphi(n, \alpha)$. $\pi_1 + \cdots + \pi_m$ ist dann nach G 5 $< \varphi(n+1, \alpha)$. Ist $\delta = (\delta_1, \delta_2, \delta_3)$, so ist, da $\delta < \alpha$, entweder 1) $\delta_1 = \beta$, $\delta_2 = \lambda$, $\delta_3 < \gamma + 1$ oder 2) $\delta_1 = \beta$, $\delta_2 < \lambda$, $\delta_3 < \alpha$ oder 3) $\delta_1 < \beta$, $\delta_2 < \alpha$, $\delta_3 < \alpha$ oder 4) $\delta \leqq \lambda$ oder 5) $\delta \leqq \gamma + 1$. Im ersten Fall ist nach G 6a $\delta \leqq \varphi(1, \alpha)$, im zweiten Falle läßt sich nach Voraussetzung ein n angeben, so daß $\delta_3 \leqq \varphi(n, \alpha)$, ferner ein m, so daß $\delta_2 \leqq \varphi(m, \lambda)$, also auch ein n, so daß $\delta_2 < \varphi(n, \lambda)$ und $\delta_3 < \varphi(n+1, \alpha)$. Dann ist aber nach G 6b $(\delta_1, \delta_2, \delta_3) < (\beta, \varphi(n, \lambda), \varphi(n, \alpha))$, d. h. $< \varphi(n+1, \alpha)$. Im dritten Falle ist nach Voraussetzung ein n und ein m vorhanden, so daß $\delta_2 \leqq \varphi(n, \alpha)$ und $\delta_3 \leqq \varphi(m, \alpha)$. Also gibt es auch ein n, so daß $\delta_2 \leqq \varphi(n, \alpha)$ und $\delta_3 \leqq \varphi(n, \alpha)$. $(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$ ist dann nach G 6e $< (\beta, \varphi(n, \lambda), \varphi(n, \alpha))$, d. h. $< \varphi(n+1, \alpha)$. Im Falle 4) ist nach dem früher bewiesenen Satz V $\delta < \varphi(1, \alpha)$. Im Falle 5) ist nach dem gleichen Satz zunächst $\gamma < \varphi(1, \alpha)$ und nach G 5 auch $\gamma + 1 < \varphi(1, \alpha)$.

Zum Schluß wollen wir für einige kleinere O-Zahlen angeben, welche Ordnungszahlen in der gewöhnlichen Schreibweise ihnen entsprechen. $(1, 1, 1)$ ist die sonst ω genannte Zahl. $(1, 1, 2)$ ist ω^ω. $(1, 1, (1, 1, 1))$ ist ω^{ω^ω}. Für kleinere O-Zahlen α, nämlich kleiner als $(1, 2, 1)$, ist $(1, 1, \alpha)$ gleich ω^α. $(1, 2, 1)$ ist die erste transfinite Epsilonzahl. $(1, 1, (1, 2, 1))$ ist aber nicht ω^{ε_1}, d. h. ε_1; dies würde ja auch der eindeutigen Schreibweise der O-Zahlen widersprechen, sondern der Limes der Folge $\varepsilon_1, \varepsilon_1 + \varepsilon_1, \varepsilon_1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_1, \ldots$, also $\omega^{\varepsilon_1 + 1}$. $(1, 2, \alpha)$ stellt

für α, die kleiner als $(1, 3, 1)$ sind, die Zahl ε_α dar. $(1, 3, 1)$ ist die Zahl, bei der die Epsilonsymbolik zum ersten Male versagt, also der Limes der Folge $\varphi(1) = \varepsilon_1$, $\varphi(n+1) = \varepsilon_{\varphi(n)}$, für den in der gewöhnlichen Symbolik kein Zeichen vorhanden ist. Wir sehen, daß unsere Symbolik ziemlich weit reicht, da die genannten O-Zahlen zu den kleineren gehören. Verhältnismäßig große O-Zahlen wären z. B. $((1, 1, 1), 1, 1)$ oder gar $(((1, 1, 1), 1, 1), 1, 1)$.

(Eingegangen am 10. Juli 1950.)

Mathematische Zeitschrift, Band 53, Heft 5, S. 414—418 (1951).

Zur Theorie der aussagenlogischen Matrizen.

Von

Hans Hermes in Münster/Westf.

1. In der Aussagenlogik betrachtet man Aussageformen, die aufgebaut werden aus *Aussagevariablen* $p_1, p_2, \ldots$ und *aussageerzeugenden Funktoren*. Es ist nicht eindeutig festgelegt, welche Funktoren man verwendet; im folgenden sollen zugelassen sein der einstellige Funktor *nicht*, symbolisiert durch N, und die zweistelligen Funktoren *wenn-so, genau dann wenn-so, und, oder*, symbolisiert der Reihe nach durch C_1, C_2, C_3, C_4. Die Menge der *Aussageformen*, auch *Ausdrücke* genannt, ist die kleinste Menge von Zeichenreihen („Worten"), für die gilt: (1) Alle Aussagenvariablen p_i gehören zu M; (2) gehört die Zeichenreihe α zu M, so auch $N\alpha$; (3) gehören die Zeichenreihen α und β zu M, so auch die Zeichenreihen $C_j\alpha\beta$ $(j = 1, \ldots, 4)$. *Beispiele* für Ausdrücke sind $C_1C_2p_1Np_2p_1$, $C_1p_1C_2Np_2p_1$. Die Schreibweise $C_j\alpha\beta$ an Stelle des vielleicht in Anlehnung an die Sprache natürlicheren $\alpha C_j\beta$ (z. B. α *und* β) geht auf Łukasiewicz zurück; sie erspart die Verwendung von Klammern. Ein Ausdruck geht in eine *Aussage* über, wenn man die vorkommenden Variablen durch Aussagen ersetzt. Ersetzt man z. B. in den angegebenen Ausdrücken p_1 durch $2+2=4$, p_2 durch $2\cdot 3=5$, so entstehen die Aussagen: *Wenn* $2+2=4$ *und* $2\cdot 3\neq 5$, *so ist* $2+2=4$, bzw.: *Wenn* $2+2=4$, *so ist* $2\cdot 3\neq 5$ *und* $2+2=4$.

In der *klassischen zweiwertigen Logik* nimmt man an: (1) Jede Aussage ist entweder wahr oder falsch. (2) Die Aussage $N\mathfrak{a}$ ist genau dann wahr, wenn die Aussage $\mathfrak{a}$ falsch ist; die Aussage $C_1\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ ist genau dann falsch, wenn die Aussage $\mathfrak{a}$ wahr und die Aussage $\mathfrak{b}$ falsch ist; $C_2\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ ist genau dann wahr, wenn $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ beide wahr oder beide falsch sind; $C_3\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ ist genau dann wahr, wenn $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ wahr sind; $C_4\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ ist genau dann falsch, wenn $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ falsch sind (also *oder* im Sinne des *vel*). Besonderes logisches Interesse verdienen die Ausdrücke, die bei *jeder* Einsetzung von Aussagen in die Variablen in *wahre* Aussagen übergehen. Diese Ausdrücke heißen *Sätze (Tautologien)*.

2. Die Menge der Sätze läßt sich formal charakterisieren mit Hilfe des von Łukasiewicz und Tarski eingeführten Begriffs der *logischen Matrix*. Eine logische Matrix $\mathfrak{M}$ ist gegeben durch zwei elementefremde Mengen A und B und fünf Funktionen $n(x)$, $c_j(x, y)$ $(j = 1, \ldots, 4)$, die für $x, y \in A \cup B$ (Vereinigung) erklärt sind und Werte aus $A \cup B$

annehmen. Die Elemente von $A \cup B$ heißen *Elemente von* $\mathfrak{M}$, die Elemente von A *ausgezeichnete Elemente von* $\mathfrak{M}$. $\mathfrak{M}$ heißt *endlich* bzw. *abzählbar*, wenn $A \cup B$ endlich bzw. abzählbar ist.

Sei eine feste Matrix $\mathfrak{M}$ gegeben. Jede Abbildung φ der Menge der Aussagevariablen in die Menge $A \cup B$ läßt sich eindeutig erweitern zu einer Abbildung φ der Menge *aller* Ausdrücke in $A \cup B$, wenn man verlangt:

$$(1) \qquad \varphi(N\alpha) = n(\varphi(\alpha)); \quad \varphi(C_j\alpha\beta) = c_j(\varphi(\alpha), \varphi(\beta)) \qquad (j = 1, \ldots, 4).$$

Eine so erzeugte Abbildung heißt eine *Bewertung*. Ein Ausdruck heißt eine *Identität* in Bezug auf die logische Matrix $\mathfrak{M}$, wenn $\varphi(\alpha) \in A$ für jede Bewertung φ.

Unter der *klassischen zweiwertigen Matrix* $\mathfrak{M}_2$ versteht man die Matrix mit den Elementen W („wahr") und F („falsch"), und dem ausgezeichneten Element W, deren Funktionen $n(x)$ und $c_j(x, y)$ gegeben sind durch die folgenden Wertetafeln:

	W	F
n	F	W

c_1	W	F
W	W	F
F	W	W

c_2	W	F
W	W	F
F	F	W

c_3	W	F
W	W	F
F	F	F

c_4	W	F
W	W	W
F	W	F

Z. B. gilt: $n(W) = F$, $c_1(W, F) = F$.

Man verifiziert leicht, daß die Menge der Sätze der klassischen Aussagenlogik übereinstimmt mit der Menge der Identitäten der Matrix $\mathfrak{M}_2$. Man sagt dafür auch kurz: $\mathfrak{M}_2$ ist zur Menge der Sätze *adäquat*.

Die Operation c_1 hat die Eigenschaft: Sind $c_1(x, y)$ und x ausgezeichnet, so ist auch y ausgezeichnet. Eine Matrix, deren Funktion c_1 diese Eigenschaft hat, nennt man *normal*. Aus der Normalität von $\mathfrak{M}_2$ folgt die *Abtrennungsregel*: Sind $C_1\alpha\beta$ und α Sätze, so ist auch β ein Satz.

3. Bei manchen logischen Untersuchungen zeichnet man Ausdrucksmengen aus, die von der Menge der Sätze der klassischen Logik verschieden sind. Beispiele solcher ausgezeichneten Mengen sind die Menge der Sätze der intuitionistischen Logik oder die Menge der Sätze einer mehrwertigen Aussagenlogik (in der etwa *notwendig* neben *wahr* und *falsch* als Wahrheitswert zugelassen ist).

Für viele derartige ausgezeichneten Ausdrucksmengen gilt die Abtrennungsregel. Für *alle* so ausgezeichneten Ausdrucksmengen jedoch gilt die *Einsetzungsregel*, die besagt, daß jede solche Menge gegenüber der Operation der Einsetzung abgeschlossen ist. Setzt man in einen Ausdruck α für eine Variable π an allen Stellen, an denen π in α vorkommt, den Ausdruck γ ein, so sagt man, daß der entstehende Ausdruck $\alpha^{\pi}/_{\gamma}$ aus α durch *Einsetzung (Substitution)* hervorgeht. Setzt man allgemeiner in einen Ausdruck α *gleichzeitig* für die paarweise verschiedenen Variablen $\pi_1, \ldots, \pi_r$ resp. die Ausdrücke $\gamma_1, \ldots, \gamma_r$ ein,

so sagt man, daß der entstehende Ausdruck $\alpha[^{\pi_1}/_{\gamma_1}, \ldots, ^{\pi_r}/_{\gamma_r}]$ aus α durch *simultane Substitution* hervorgeht. Die Operation $[^{\pi_1}/_{\gamma_1}, \ldots, ^{\pi_r}/_{\gamma_r}]$ ist erklärt durch folgende Festsetzungen (abkürzend werde

$$(*) \qquad \alpha[^{\pi_1}/_{\gamma_1}, \ldots, ^{\pi_r}/_{\gamma_r}] = \alpha'$$

gesetzt):

(2a) $p_i' = \gamma_k$ bzw. p_i, je nachdem ob $p_i = \pi_k$, oder ob p_i von allen $\pi_1, \ldots, \pi_r$ verschieden ist.

(2b) $(N\alpha)' = N\alpha'$; $(C_j\alpha\beta)' = C_j\alpha'\beta'$ $\qquad (j = 1, \ldots, 4)$.

Bei vorgegebenem Ausdruck α und vorgegebener simultaner Substitution läßt sich stets eine geeignete Folge einfacher Substitutionen angeben, die hintereinander geschaltet α in denselben Ausdruck überführen wie die simultane Substitution [1]).

Die naheliegende Frage, ob auch zu derartigen ausgezeichneten Mengen adäquate Matrizen existieren, kann bejaht werden. Versteht man unter einem *System* eine Menge von Ausdrücken, die abgeschlossen ist in Bezug auf Einsetzung und Abtrennung, so gilt der grundlegende

Satz von Lindenbaum: *Zu jedem aussagenlogischen System existiert eine adäquate normale abzählbare Matrix* [2]).

Dieser Satz wurde 1930 von Lukasiewicz und Tarski ohne Beweis mitgeteilt [3]). Auch später scheint kein Beweis veröffentlicht zu sein. Die folgende einfache Herleitung des Lindenbaum'schen Satzes legt zugleich eine Verallgemeinerung nahe (Nr. 5).

4. Eine zu einem vorgelegten System $\mathfrak{S}$ von Ausdrücken adäquate normale abzählbare Matrix $\mathfrak{M}$ kann man sofort angeben, indem man als Matrixelemente *alle* Ausdrücke und als ausgezeichnete Elemente die in $\mathfrak{S}$ liegenden Ausdrücke verwendet. Eine solche Matrix ist jedenfalls abzählbar. Die Matrixfunktionen definiere man durch:

$$n(\alpha) = N\alpha, \quad c_j(\alpha, \beta) = C_j\alpha\beta \qquad (j = 1, \ldots, 4).$$

---

[1]) Kommt etwa p_3 nicht in α vor, so ist z. B. $\alpha[^{p_1}/_{p_2}, ^{p_2}/_{p_1}] = ((\alpha^{p_1}/_{p_3})^{p_3}/_{p_1})^{p_3}/_{p_2}$; dagegen ist $\alpha[^{p_1}/_{p_3}, ^{p_3}/_{p_1}] \neq (\alpha^{p_1}/_{p_2})^{p_2}/_{p_1}$, wenn p_1 in α vorkommt. Zur Ersetzung der simultanen Substitutionen durch iterierte einfache vgl. z. B. W. V. Quine: A system of logistic, Harvard University Press, Cambridge 1934, p. 62 ff.

[2]) Daß nicht zu jedem System eine adäquate *endliche* Matrix existiert, zeigt Gödel am Beispiel des intuitionistischen Heyting'schen Aussagenkalküls: Ergebn. math. Kolloqu. Wien, Heft 4 (1933), pag. 40. — Man verifiziert leicht, daß eine Ausdrucksmenge ein System sein muß, wenn zu ihr eine adäquate normale Matrix existiert.

[3]) Comptes rendus des séances de la société des sciences et des lettres de Varsovie. Classe III. XXIII année 1930, 30—50. Insbesondere pag. 34.

Sind $c_1(\alpha, \beta)$ und α ausgezeichnet, so liegen $C_1\alpha\beta$ und α in $\mathfrak{S}$. Da $\mathfrak{S}$ in Bezug auf die Abtrennung abgeschlossen ist, folgt $\beta \in \mathfrak{S}$; also ist β ausgezeichnet. $\mathfrak{M}$ ist daher normal.

Jede Identität in Bezug auf $\mathfrak{M}$ liegt in $\mathfrak{S}$. Ist nämlich γ eine Identität, so ist $\varphi(\gamma) \in \mathfrak{S}$ für jede Bewertung φ. Dies gilt insbesondere für die Bewertung φ_0, die erzeugt wird durch die Abbildung jeder Aussagevariablen auf sich selbst. Dann ist $\varphi_0(\gamma) = \gamma$, also $\gamma \in \mathfrak{S}$, w. z. b. w.

Zum Nachweis dafür, daß $\mathfrak{M}$ zu $\mathfrak{S}$ adäquat ist, braucht nur noch gezeigt zu werden, daß jedes Element $\gamma \in \mathfrak{S}$ eine Identität ist, also durch jede Bewertung φ in $\mathfrak{S}$ abgebildet wird. Seien $\pi_1, \ldots, \pi_r$ die verschiedenen in γ vorkommenden Aussagevariablen und sei $\varphi(\pi_i) = \gamma_i$ $(i = 1, \ldots, r)$. Nun ist $\varphi(\gamma) = \gamma[^{\pi_1}/_{\gamma_1}, \ldots, ^{\pi_r}/_{\gamma_r}]$. Dies gilt sogar für jeden Ausdruck, der höchstens die Variablen $\pi_1, \ldots, \pi_r$ enthält. Das verifiziert man sofort für die Aussagevariablen $\pi_1, \ldots, \pi_r$ selbst, und schließt von hier mit Hilfe von (1), (2b), (3) auf beliebige solche Ausdrücke vermöge der Beziehungen (man beachte die Abkürzung (*)):

$$\varphi(N\alpha) = n(\varphi(\alpha)) = n(\alpha') = N\alpha' = (N\alpha)',$$

$$\varphi(C_j\alpha\beta) = c_j(\varphi(\alpha), \varphi(\beta)) = c_j(\alpha', \beta') = C_j\alpha'\beta' = (C_j\alpha\beta)' \quad (j = 1, \ldots, 4).$$

$\varphi(\gamma)$ entsteht demnach aus γ durch simultane Einsetzung, also nach einer Bemerkung in Nr. 3 aus γ durch mehrere hintereinander ausgeführte gewöhnliche Einsetzungen. Da $\mathfrak{S}$ in Bezug auf solche Einsetzungen abgeschlossen ist, folgt $\varphi(\gamma) \in \mathfrak{S}$.

5. Es soll noch auf zwei Verallgemeinerungen des LINDENBAUM'schen Satzes hingewiesen werden.

(a) Man darf offenbar die Anzahl der zum Aufbau der Ausdrücke verwendeten aussagenlogischen Funktoren beliebig vermindern oder vermehren, insbesondere auch drei- oder mehrstellige Funktoren zulassen.

(b) In die oben gegebene Definition der Begriffe *System* und *normale Matrix* geht entscheidend ein die Abtrennungsrelation, welche man schreiben kann in der Form:

$$\text{Aus } \alpha_1, C\alpha_1\alpha_2 \text{ entsteht } \alpha_2.$$

An Stelle dieser Relation kann man eine beliebige Menge von Relationen R_ν nehmen, welche sich schreiben lassen in der Form:

$$(R_\nu) \qquad \text{Aus } \mathsf{A}_1, \ldots, \mathsf{A}_n \text{ entsteht } \mathsf{A}.$$

Hierbei sind für $\mathsf{A}_1, \ldots, \mathsf{A}_n, \mathsf{A}$ *Metaausdrücke* zu setzen, die aus den Variablen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ und den Funktoren N, C_j ebenso gebildet werden, wie die Ausdrücke aus den Variablen $p_1, p_2, \ldots$ und diesen Funktoren. Nun kann man verallgemeinernd definieren: Ein *System* ist eine Menge von Ausdrücken, die abgeschlossen ist gegenüber der Einsetzung und gegenüber den Relationen R_ν; d. h. mit $\mathsf{A}_1, \ldots, \mathsf{A}_n$ soll auch immer

$\mathfrak{A}$ zum System gehören. Eine Matrix heißt *normal*, wenn aus $F_1 \in A, \ldots, F_n \in A$ stets folgt: $F \in A$ (A sei die Menge der ausgezeichneten Elemente der Matrix). Die hier auftretenden Funktionensymbole F_k und F erhält man aus den $\mathfrak{A}_k$ und $\mathfrak{A}$ durch formale Ersetzung der Funktoren N, C_j durch die korrespondierenden Funktionszeichen n, c_j; die Variablen α_i sind aufzufassen als Variable über dem Bereich der Matrixelemente. Man erkennt sofort, daß die in Nr. 4 gegebene Herleitung des LINDENBAUM'schen Satzes auch bei dieser verallgemeinerten Bedeutung der Begriffe *System* und *normale Matrix* gültig bleibt.

(Eingegangen am 29. Oktober 1949.)

Mathematische Zeitschrift, Band 53, Heft 5, S. 419—449 (1951).

Einige Eigenschaften und Anwendungen der δ- und ε-Zahlen.

Von

Walter Neumer in Worms.

Vorbemerkung.

Im folgenden sollen einige transfinite Funktionen von Ordnungszahlen untersucht werden, welche durch Ausdrücke der Form

$$\alpha_1^{\alpha_2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\alpha_n}}}}} = [\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n],$$

die wir Exponentenketten nennen, dargestellt oder mittels ihrer definiert sind. Zunächst werden diese Exponentenketten selbst näher betrachtet, u. a. auch ihre Verallgemeinerung zu Ketten mit unendlich vielen Gliedern. Nach einigen allgemeinen Bemerkungen über monotone Funktionen werden die Unstetigkeitsstellen λ der als spezielle p-gliedrige Exponentenketten definierten Funktionen

$$\varphi_{pqr}(\alpha) = [\alpha, \ldots, \alpha, \alpha^r, \alpha^q] = [\underset{p-2}{\alpha}, \alpha^r, \alpha^q],$$

wobei $1 \leqq p < \omega$, $1 \leqq q < \omega$, $1 \leqq r < \omega$ und $\varphi_{1qr}(\alpha) = \alpha^q$ sowie $\varphi_{2qr} = (\alpha^r)^{\alpha^q}$ sein soll, zugleich mit den zugehörigen Limeswerten $\tilde{\varphi}_{pqr}(\lambda) = \lim \varphi_{pqr}(\nu)$ $(1 \leqq \nu < \lambda)$ bestimmt. Sodann wird gezeigt, wie sich die Normal-Funktionen

$$\sigma_{pqr}(\alpha) = \sum_{1 \leqq \nu < \alpha} \varphi_{pqr}(\nu) \text{ und } \pi_{pqr}(\alpha) = \prod_{1 \leqq \nu < \alpha} \varphi_{pqr}(\nu),$$

wenigstens für Limeszahlen α, in einfacher Weise durch geschlossene Ausdrücke darstellen lassen.

Eine wesentliche Rolle bei diesen Untersuchungen spielen die δ- und ε-Zahlen, d. h. die Zahlen $\delta = \omega^{\omega^\nu}$ mit $\nu \geqq 0$ und $\varepsilon = 2^\varepsilon$ [1]). Daher

[1]) Cantor hat diejenigen Zahlen, welche die Eigenschaft $\varepsilon = \omega^\varepsilon$ besitzen, ε-Zahlen genannt; vgl. G. Cantor, Gesammelte Abhandlungen, Berlin 1932, **9**, § 20. Es ist aber zuweilen bequem, auch die Zahl $\omega = 2^\omega$ noch zu den ε-Zahlen zu rechnen und die letzteren durch die Forderung $\varepsilon = 2^\varepsilon$ zu definieren, welche für $\varepsilon > \omega$ mit der Cantor'schen gleichwertig ist. — Der Name δ-Zahlen für die Zahlen der Form ω^{ω^ν} stammt von G. Hessenberg; vgl. dessen Grundbegriffe der Mengenlehre, Göttingen 1906. — Über die Eigenschaften der δ- und ε-Zahlen siehe auch E. Jacobsthal, Über den Aufbau der transfiniten Arithmetik, Math. Ann. **66** S. 145—194 (1909), § 4 und 5.

sollen im folgenden die Buchstaben δ und ε, wenn nichts anderes gesagt wird, stets δ- resp. ε-Zahlen ($\varepsilon = 2^\varepsilon$) bedeuten. Ferner sollen mit dem Buchstaben λ ausnahmslos Limeszahlen bezeichnet werden.

§ 1.

Exponentenketten.

1. Zunächst wollen wir einige Formeln und Abkürzungen zusammenstellen.

Definition 1. *Die Funktion ι_α sei für jede Ordnungszahl α definiert durch die Festsetzungen:*

$$\iota_0 = 0,\ \iota_\lambda = 0\ (\lambda \textit{ Limeszahl}),\ \iota_{\nu+1} = 1 \quad (\nu \geqq 0).$$

Unter $\alpha - \iota_\alpha$ ist dann α oder $\alpha - 1$ zu verstehen, je nachdem $\iota_\alpha = 0$ oder $= 1$ ist. Es gelten die Beziehungen:

$$\iota_{\alpha+\beta} = \iota \quad (\beta > 0),\quad \iota_{\alpha\beta} = \iota_\alpha \iota_\beta. \tag{1}$$

Ferner bestätigt man leicht

$$(\alpha + \beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\iota_\gamma \text{ für } \beta + \alpha = \alpha. \tag{2}$$

Aus (1) und (2) ergibt sich durch vollständige Induktion

$$(\alpha+\beta)^q = \alpha^q + \alpha^{q-1}\beta + (\alpha^{q-2}\beta + \cdots + \alpha\beta + \beta)\iota_\beta \tag{3}$$
$$(\beta + \alpha = \alpha,\ 1 \leqq q < \omega).$$

Diese Formel ist natürlich sinngemäß zu interpretieren für $q = 1, 2, 3$. Analog zu (2) hat man

$$(\alpha\beta)^\gamma = \alpha^\gamma \beta^{\iota\gamma} \text{ für } \beta\alpha = \alpha > 0. \tag{4}$$

Durch Limesbildung folgt aus (3) $(\alpha+\beta)^\omega = \alpha^\omega$, somit

$$(\alpha+\beta)^{\omega\eta} = \alpha^{\omega\eta}$$
$$(\alpha+\beta)^{\omega\eta+n} = \alpha^{\omega\eta}(\alpha+\beta)^n \tag{5}$$
$$(\beta + \alpha = \alpha,\ \alpha + \eta > 0,\ 1 \leqq n < \omega).$$

Aus (5) entnimmt man:

$$(\alpha+\beta)^\gamma = \alpha^\gamma + \vartheta(\gamma) \quad (\beta + \alpha = \alpha \geqq \omega), \tag{6}$$
$$\text{wobei } \vartheta(\gamma) + \alpha^\gamma = \alpha^\gamma \text{ und } \vartheta(\gamma) = 0 \text{ für } \iota_\gamma = 0.$$

Endlich bemerken wir noch, daß γ^τ stets eine Limeszahl wird, wenn $\gamma \geqq 2$ und $\tau \geqq \omega$ ist; das kann ausgedrückt werden durch die Relation

$$\iota_{\gamma^\tau} = 0 \text{ für } \gamma \geqq 2,\ \tau \geqq \omega. \tag{7}$$

2. Die eingangs erwähnten *Exponentenketten* definieren wir wie folgt:

$$[\alpha_0] = \alpha_0,\ [\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n] = \alpha_0^{[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]} \tag{8}$$
$$(1 \leqq n < \omega,\ \alpha_i \geqq 1 \text{ für } 0 \leqq i \leqq n),$$

wobei wir noch festsetzen, *daß, wenn ein* $\alpha_i = 1$ *ist, auch alle* $\alpha_j = 1$ *sein sollen für* $i \leqq j \leqq n$.

Um unendliche Exponentenketten erklären zu können, bedienen wir uns der folgenden Redeweise:

Definition 2. *Sei* M *eine beliebige nicht leere Menge und jedem* $x \in M$ *eine beliebige Ordnungszahl* α_x *zugeordnet, wodurch ein Komplex* $(\ldots, \alpha_x, \ldots)$ *von Ordnungszahlen entsteht. Die kleinste Zahl, welche von keinem* α_x *übertroffen wird, heiße die obere Grenze der* α_x *und werde durch* fin α_x $(x \in M)$ *bezeichnet.*

fin α_x ist entweder das Maximum aller α_x oder der Limes der wohlgeordneten Menge aller verschiedenen α_x. — Ist nun eine abzählbare Folge $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ von Ordnungszahlen gegeben, so definieren wir

$$(9)\quad \begin{array}{ll} \text{(a)} & [\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots] = \text{fin}\,[\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n] \quad (n < \omega) \\ \text{(b)} & [\ldots, \alpha_2, \alpha_1, \alpha_0] = \text{fin}\,[\alpha_n, \ldots, \alpha_1, \alpha_0] \quad (n < \omega), \end{array}$$

wobei wieder alle $\alpha_i \geqq 1$ und mit einem $\alpha_i = 1$ auch sämtliche *rechts* von ihm stehenden α_j (also in (9a) alle α_j mit $j > i$, in (9b) alle α_j mit $j < i$) $= 1$ sein sollen. Infolge dieser Festsetzung sind nicht nur die Größen (9a), sondern auch die Größen (9b) die oberen Grenzen von *nicht abnehmenden* Zahlenfolgen. Dies gilt auch von den nachstehenden Größen

$$(10)\quad [\ldots, \alpha_1, \alpha_0, \beta_0, \beta_1, \ldots] = \text{fin}\,[\alpha_n, \ldots, \alpha_0, \beta_0, \ldots, \beta_n] \quad (n < \omega),$$

wenn wieder verabredet wird, daß $\alpha_i \geqq 1$, $\beta_i \geqq 1$ für $0 \leqq i < \omega$ und zugleich mit einem $\alpha_i = 1$ oder $\beta_i = 1$ auch alle rechts von ihm stehenden Glieder der Exponentenkette $= 1$ sein sollen.

Die Exponentenkette (10) können wir auch folgendermassen darstellen:

$$(11)\quad \begin{array}{ll} \text{(a)} & [\ldots, \alpha_1, \alpha_0, \beta_0, \beta_1, \ldots] = [\ldots, \alpha_1, \alpha_0, [\beta_0, \beta_1, \ldots]] \\ \text{(b)} & [\ldots, \alpha_1, \alpha_0, \beta_0, \beta_1, \ldots] = \text{fin}\,[\ldots, \alpha_1, \alpha_0, \beta_0, \ldots, \beta_n] \quad (n < \omega). \end{array}$$

Denn nach der Definition (10) ist für festes $p < \omega$

$$[\ldots, \alpha_1, \alpha_0, \beta_0, \beta_1, \ldots] \geqq [\alpha_p, \ldots, \alpha_0, \beta_0, \beta_1, \ldots] = [\alpha_p, \ldots, \alpha_0, [\beta_0, \beta_1, \ldots]],$$

$$\text{d. h. } [\ldots, \alpha_0, \beta_0, \ldots] \geqq \text{fin}_{p<\omega}\,[\alpha_p, \ldots, \alpha_0, [\beta_0, \beta_1, \ldots]] = [\ldots, \alpha_0, [\beta_0, \ldots]],$$

während zugleich

$$[\ldots, \alpha_0, [\beta_0, \ldots]] \geqq [\alpha_p, \ldots, \alpha_0, \beta_0, \ldots, \beta_p], \text{ also } [\ldots, \alpha_0, [\beta_0, \ldots]] \geqq [\ldots, \alpha_0, \beta_0, \ldots]$$

gilt. — Analog beweist man (11b).

Das durch (10) definierte Symbol $[\ldots, \alpha_0, \beta_0, \ldots]$ ändert seinen Zahlenwert nicht, wenn man die Rolle, welche die Zahlen α_0, β_0 auf der rechten Seite von (10) spielen, zwei beliebigen anderen benachbarten Zahlen α_{n+1}, α_n oder β_n, β_{n+1} überträgt. Darüber hinaus ist leicht zu

zeigen, daß sogar noch

$$[\ldots, \alpha_1, \alpha_0, \beta_0, \beta_1, \ldots] = \operatorname{fin}[K_i] \quad (i < \omega) \tag{12}$$

richtig bleibt, wo die K_i folgendermaßen erklärt sind: Der geordnete Komplex $K = (\ldots, \alpha_1, \alpha_0, \beta_0, \beta_1, \ldots)$ werde als Belegung einer geordneten Menge A vom Typus $\omega^* + \omega$ aufgefaßt, und es sei eine Folge A_i $(i < \omega)$ von endlichen oder unendlichen echten Teilmengen von A gegeben mit den Eigenschaften $A_i \subset A_j$[2]) für $i < j$ und $\sum_{i<\omega} A_i = A$; K_i sei derjenige Teilkomplex von K, welcher der Teilmenge A_i von A entspricht, und $[K_i]$ bedeute die aus den Elementen von K_i bestehende Exponenten-Kette. — Nun ist $[K_i] \leqq [\ldots, \alpha_0, \beta_0, \ldots] = [K]$ und für hinreichend großes i zugleich $[K_i] \geqq [\alpha_n, \ldots, \alpha_0, \beta_0, \ldots, \beta_n]$ bei gegebenem $n < \omega$, also

$$[K] \geqq \operatorname*{fin}_{i<\omega} [K_i] \geqq \operatorname*{fin}_{n<\omega} [\alpha_n, \ldots, \alpha_0, \beta_0, \ldots, \beta_n] = [K].$$

Zu (12) analoge Beziehungen gelten natürlich für die Symbole (9). Mittels (11a) ist das Symbol (10) auf das Symbol (9b) zurückgeführt.

Wir bemerken noch: Wenn

$$\beta_0 \leqq \beta_1 \leqq \cdots \leqq \beta_\nu \leqq \cdots \quad (\nu < \lambda,\ \lambda \text{ Limeszahl})$$

eine nicht absteigende Folge von Ordnungszahlen ist mit $\operatorname*{fin}_{\nu<\lambda} \beta_\nu = \beta_\lambda$, dann gilt

$$[\ldots, \alpha_1, \alpha_0, \beta_\lambda] = \operatorname{fin}[\ldots, \alpha_1, \alpha_0, \beta_\nu] \quad (\nu < \lambda). \tag{13}$$

Denn einerseits ist

$$[\ldots, \alpha_1, \alpha_0, \beta_\nu] \leqq [\ldots, \alpha_1, \alpha_0, \beta_\lambda], \quad \text{somit} \operatorname*{fin}_{\nu<\lambda} [\ldots, \alpha_0, \beta_\nu] \leqq [\ldots, \alpha_0, \beta_\lambda].$$

Andererseits aber ist

$$\operatorname*{fin}_{\nu<\lambda} [\ldots, \alpha_0, \beta_\nu] \geqq \operatorname*{fin}_{\nu<\lambda} [\alpha_n, \ldots, \alpha_0, \beta_\nu] = [\alpha_n, \ldots, \alpha_0, \beta_\lambda],$$

$$\text{somit} \operatorname*{fin}_{\nu<\lambda} [\ldots, \alpha_0, \beta_\nu] \geqq \operatorname*{fin}_{n<\omega} [\alpha_n, \ldots, \alpha_0, \beta_\lambda] = [\ldots, \alpha_0, \beta_\lambda].$$

Wenn λ konfinal mit ω ist, dann gilt auch

$$[\ldots, \alpha_1, \alpha_0, \beta_\lambda] = \operatorname*{fin}_{n<\omega} [\alpha_n, \ldots, \alpha_0, \beta_{\nu_n}] \quad (\lambda = \lim_{n<\omega} \nu_n). \tag{14}$$

Denn es ist

$$[\ldots, \alpha_0, \beta_\lambda] \geqq \operatorname*{fin}_{n<\omega} [\alpha_n, \ldots, \alpha_0, \beta_{\nu_n}] \geqq [\ldots, \alpha_0, \beta_{\nu_p}] \quad (p < \omega),$$

$$\text{also} \operatorname*{fin}_{n<\omega} [\alpha_n, \ldots, \alpha_0, \beta_{\nu_n}] \geqq \operatorname*{fin}_{p<\omega} [\ldots, \alpha_0, \beta_{\nu_p}] = [\ldots, \alpha_0, \beta_\lambda] \quad \text{(s. (13))}.$$

Offenbar ist (11a) ein Spezialfall von (14), und die Gleichheit der rechten Seiten von (11a) und (11b) ein spezieller Fall von (13).

---

[2]) Wir bezeichnen mit $M \subset N$ die Beziehung, daß M *echte* Teilmenge von N ist.

Man kann die Exponentenketten (9b) beliebig weit nach links hin fortsetzen. Sei nämlich $\varphi(\nu) = \alpha_\nu$ eine für jede Ordnungszahl ν definierte Funktion mit den Eigenschaften, daß immer $\alpha_\nu \geqq 1$ und daß $\alpha_\tau = 1$ ist für $\tau < \nu$, wenn $\alpha_\nu = 1$. (Ist $\varphi(\nu)$ etwa nur für $\nu < \Lambda$ definiert, so wähle man z. B. $\varphi(\nu) = \nu$ oder $\varphi(\nu) = 2$ für $\nu \geqq \Lambda$). Dann definieren wir induktiv für alle $\sigma \geqq 1$ eine Funktion

$$f(\sigma) = [\ldots, \alpha_\nu, \ldots, \alpha_1, \alpha_0]_{\nu < \sigma} \tag{15}$$

in Fortführung von (8) und (9b) durch die Festsetzungen

$$f(1) = [\alpha_0] \tag{16 a}$$

$$f(\xi + 1) = \alpha_\xi^{f(\xi)} = [\alpha_\xi, f(\xi)] \tag{16 b}$$

$$f(\lambda) = \operatorname{fin} f(\xi) \quad (\xi < \lambda). \tag{16 c}$$

Aufgrund von (16c) und der Eigenschaft

$$f(\xi) \leqq f(\eta) \quad \text{für} \quad \xi < \eta$$

kann man die Funktion $f(\sigma)$ *halbnormal* nennen[3]). Halbnormale Funktionen werden offenbar auch definiert durch folgende Festsetzungen, in denen $\alpha \circ \beta$ entweder die Addition $\alpha + \beta$ oder die Multiplikation $\alpha \cdot \beta$ bedeuten soll:

$$f(1) = \alpha_0, \; f(\xi + 1) = \alpha_\xi \circ f(\xi), \; f(\lambda) = \operatorname{fin} f(\xi) \quad (\xi < \lambda);$$

diese nach links hin fortgesetzte Addition resp. Multiplikation ist freilich nicht mehr assoziativ bei unendlich vielen Elementen α_ν.

Für die allgemeinen Exponentenketten (15) gelten den Relationen (12) bis (14) analoge Beziehungen, worauf wir hier nicht mehr eingehen.

3. Wir fahren in der Betrachtung der endlichen und abzählbaren Exponentenketten (8) und (9) fort. Wenn in dem Symbol $[\alpha_0, \ldots, \alpha_n]$ einige aufeinanderfolgende Zahlen gleich sind, schreiben wir

$$[\alpha_0, \ldots, \alpha_0; \; \alpha_1, \ldots, \alpha_1; \; \alpha_n, \ldots, \alpha_n] = \begin{bmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \ldots & \alpha_n \\ e_0 & e_1 & & e_n \end{bmatrix} \tag{17}$$

$$(0 \leqq e_i < \omega, \; 0 \leqq i \leqq n),$$

wobei auf der linken Seite α_i e_i-mal hintereinander stehen soll. Diejenigen α_i, für welche auf der rechten Seite $e_i = 0$, sollen beim Übergang zur linken Seite weggelassen werden, d. h. es soll z. B.

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta \\ 2 \end{bmatrix} = [\beta, \beta]$$

sein; wenn alle $e_i = 0$, wollen wir dem Symbol (17) rechts den Wert 1 beilegen, also

$$\begin{bmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \ldots & \alpha_n \\ 0 & 0 & & 0 \end{bmatrix} = 1$$

[3]) Funktionen $f(\xi)$ mit den Eigenschaften $f(\xi) < f(\eta)$ für $\xi < \eta$ und $f(\lambda) = \lim f(\xi)$ $(\xi < \lambda)$ heißen nach HAUSDORFF *Normalfunktionen*; vgl. F. HAUSDORFF, Grundzüge der Mengenlehre, Leipzig 1914, V. § 3.

setzen. Ferner sollen die $e_i = 1$ nach Belieben fortbleiben, es soll also

$$\begin{bmatrix}\alpha\\1\end{bmatrix} = [\alpha]\,, \quad \begin{bmatrix}\alpha & \beta\\1 & 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\alpha, & \beta\\2\end{bmatrix}$$

sein usw. — Wenn in (9) $\alpha_{p+1} = \alpha_{p+2} = \cdots = \alpha$, so schreiben wir

$$(18)\qquad \begin{aligned}[\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_p, \alpha, \alpha, \ldots] &= \begin{bmatrix}\alpha_0, & \alpha_1, & \ldots, & \alpha_p, & \alpha\\ & & & & \omega\end{bmatrix}\\ [\ldots, \alpha, \alpha, \alpha_p, \ldots, \alpha_1, \alpha_0] &= \begin{bmatrix}\alpha & & & & \\ \omega^* & \alpha_p, & \ldots, & \alpha_1, & \alpha_0\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Entsprechend verfahren wir mit dem Symbol (10), so daß z. B. ein Symbol

$$\begin{bmatrix}\alpha & & & & & \\ \omega^* & \alpha_p, & \ldots, & \alpha_0, & \beta_0, \ldots, & \beta_q, & \beta\\ & & & & & & \omega\end{bmatrix} \qquad \text{entsteht.}$$

Analog wäre das allgemeine Symbol

$$\left[\ldots, \begin{matrix}\alpha_\nu\\ \tau_\nu^*\end{matrix}, \ldots, \begin{matrix}\alpha_1\\ \tau_1^*\end{matrix}, \begin{matrix}\alpha_0\\ \tau_0^*\end{matrix}\right]_{\nu<\sigma} \qquad (\tau_\nu, \sigma \text{ beliebige Ordnungzahlen})$$

aufzufassen. Man hat z. B. (vgl. (10) und (11))

$$\begin{bmatrix}\alpha\\ \omega\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\alpha\\ \omega^*\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\alpha & \alpha\\ \omega^* & \omega\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\alpha & \begin{bmatrix}\alpha\\ \omega\end{bmatrix}\\ \omega^* & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\alpha & \alpha\\ \omega^* & n\end{bmatrix}$$
$$= [\alpha, \alpha, \ldots] = [\ldots, \alpha, \alpha] = [\ldots, \alpha, \alpha, \ldots].$$

Wenn $\alpha \geqq 2$, so ist bekanntlich[4]) $\begin{bmatrix}\alpha\\ \omega\end{bmatrix}$ die nächste auf α folgende Zahl $\varepsilon = 2^\varepsilon$. Für $\varepsilon > \omega$ folgt, wie man weiß, aus $\varepsilon = 2^\varepsilon$ auch $\varepsilon = \omega^\varepsilon$, d. h. ε ist eine ε-Zahl im Sinne Cantors. (Beweis etwa so: Nach (7) ist $\varepsilon = 2^\varepsilon > \omega$ eine Limeszahl, $\varepsilon = \omega\eta$, somit $\omega\eta = 2^{\omega\eta} = \omega^\eta > \omega$, also $\eta = \omega^{-1+\eta} \geqq \omega$, $-1+\eta = \eta$, $\eta = \omega^\eta$, daher $\varepsilon = \omega\eta = \omega^\eta = \eta = \omega^\varepsilon$. — Die Eigenschaft der ε-Zahlen: $\varepsilon = \alpha^\varepsilon$ für $2 \leqq \alpha < \varepsilon$, läßt sich u. a. so beweisen: Sei, da für $\varepsilon = \omega$ oder $\alpha = \omega$ nichts zu beweisen ist,

$$\alpha = \omega^\nu n + \zeta > \omega, \text{ wobei } 1 \leqq n < \omega,\ \zeta < \omega^\nu.$$

Dann wird nach (5) und (4) wegen $\nu\varepsilon = \varepsilon = \omega^{\omega^\varepsilon}$: $\alpha^\varepsilon = \omega^{\nu\varepsilon} = \omega^\varepsilon = \varepsilon$. — Daß zwischen α und $\begin{bmatrix}\alpha\\ \omega\end{bmatrix}$ keine ε-Zahl liegt, folgt z. B. so: Sei $2 \leqq \alpha < \beta < \begin{bmatrix}\alpha\\ \omega\end{bmatrix}$, dann gibt es eine natürliche Zahl n mit $\begin{bmatrix}\alpha\\ n\end{bmatrix} \leqq \beta < \begin{bmatrix}\alpha\\ n+1\end{bmatrix}$, und es wird $\beta < \alpha^{\begin{bmatrix}\alpha\\ n\end{bmatrix}} \leqq \alpha^\beta$.)

4. Nun beweisen wir die Formeln:

$$(19)\qquad \begin{bmatrix}\alpha\\ n\end{bmatrix}, \beta\Big] = [\tau_1, \ldots, \tau_{n-1}, \alpha^\beta] = \begin{bmatrix}2\\ n-1\end{bmatrix}, \alpha^\beta\Big]$$
$$(1 \leqq n < \omega \leqq \alpha,\ \omega \leqq \beta,\ 2 \leqq \tau_i \leqq \alpha,\ 1 \leqq i \leqq n-1).$$

[4]) Bezüglich der in diesem Absatz angeführten Eigenschaften der ε-Zahlen vgl. Cantor, Hessenberg und Jacobsthal a. a. O. [1]).

Zum Beweis genügt es natürlich, die Übereinstimmung des Wertes der ersten und der dritten Exponentenkette zu zeigen. Gemäß unseren Verabredungen hinsichtlich (17) ist (19) richtig für $n = 1$. Sei daher bewiesen, daß (19) richtig ist für ein bestimmtes $n \geqq 1$. Da $\left[\begin{smallmatrix}\alpha\\ n\end{smallmatrix}, \beta\right]$ Limeszahl, so folgt, wenn wir α in der Form

$$\alpha = \omega^\nu n + \zeta \geqq \omega \quad (1 \leqq n < \omega;\ \zeta < \omega^\nu)$$

annehmen:

$$\left[\begin{smallmatrix}\alpha\\ n+1\end{smallmatrix}, \beta\right] = \alpha\left[\begin{smallmatrix}\alpha\\ n\end{smallmatrix}, \beta\right] = \omega^\nu\left[\begin{smallmatrix}\alpha\\ n\end{smallmatrix}, \beta\right] = \omega\left[\begin{smallmatrix}\alpha\\ n\end{smallmatrix}, \beta\right] = 2^\omega\left[\begin{smallmatrix}\alpha\\ n\end{smallmatrix}, \beta\right] = 2\left[\begin{smallmatrix}\alpha\\ n\end{smallmatrix}, \beta\right] = \left[\begin{smallmatrix}2\\ n\end{smallmatrix}, \alpha\beta\right],$$

womit (19) bewiesen ist.

Sei nun $\omega < \alpha < 2^\varkappa$, so daß auch (da $2^\varkappa$ Limeszahl) $\alpha + n < 2^\varkappa$ ist für $n < \omega$. Dann haben wir folgende Kette von Relationen:

$$\alpha^\alpha \leqq 2^{\varkappa\cdot\alpha} < [2, 2^{\varkappa\cdot 2}] = \left[\begin{smallmatrix}2\\ 2\end{smallmatrix}, \alpha 2\right] < \left[\begin{smallmatrix}2\\ 2\end{smallmatrix}, 2^{\varkappa+1}\right] = \left[\begin{smallmatrix}2\\ 3\end{smallmatrix}, \alpha+1\right] < \left[\begin{smallmatrix}2\\ 3\end{smallmatrix}, 2^\varkappa\right] = \left[\begin{smallmatrix}2\\ 4\end{smallmatrix}, \alpha\right],$$

somit

$$\alpha^\alpha < \left[\begin{smallmatrix}2\\ 4\end{smallmatrix}, \alpha\right] \quad \text{für} \quad \omega < \alpha < 2^\varkappa. \tag{20}$$

Dieses Ergebnis läßt sich nicht auf allgemeine Weise verbessern, denn für $\alpha = \omega + 1$ wird

$$(\omega+1)^{\omega+1} = \omega^\omega(\omega+1),\ 2^{\omega+1} = \omega 2,\ 2^{2^{\omega+1}} = 2^{\omega^2} = \omega^2,$$

$$\left[\begin{smallmatrix}2\\ 3\end{smallmatrix}, \omega+1\right] = 2^{\omega^2} = \omega^\omega, \quad \left[\begin{smallmatrix}2\\ 4\end{smallmatrix}, \omega+1\right] = 2^{\omega^\omega} = \omega^{\omega^\omega}, \text{ somit}$$

$$\left[\begin{smallmatrix}2\\ 3\end{smallmatrix}, \omega+1\right] < (\omega+1)^{\omega+1} < \left[\begin{smallmatrix}2\\ 4\end{smallmatrix}, \omega+1\right].$$

(19) und (20) liefern für $\beta = \alpha$ und bei Ersetzung von n durch $n-1$ die folgende, auch für $n = 1$ noch richtige Relation

$$\left[\begin{smallmatrix}\alpha\\ n\end{smallmatrix}\right] < \left[\begin{smallmatrix}2\\ n+2\end{smallmatrix}, \alpha\right] \quad (1 \leqq n < \omega < \alpha < 2^\varkappa),$$

und diese liefert mittels Limesbildung die auch bei endlichem α noch richtige Beziehung

$$\left[\begin{smallmatrix}\alpha\\ \omega\end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix}2\\ \omega^*\end{smallmatrix}, \alpha\right] \quad (2 \leqq \alpha < 2^\varkappa),$$

aus der man schließt

$$\left[\begin{smallmatrix}\varepsilon\\ \omega\end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix}2\\ \omega^*\end{smallmatrix}, \varepsilon+1\right] \quad (\varepsilon = 2^\varepsilon).$$

5. Es ist vielleicht von Interesse, nach den Zahlen zu fragen, welche durch die Exponentenketten (9) dargestellt werden. Um triviale Fälle zu vermeiden, setzen wir alle $\alpha_i \geqq 2$ voraus. Zu jedem $\alpha_i \geqq \omega$

gibt es ein $\varepsilon_i = 2^{\varepsilon_i}$, so daß $\varepsilon_i \leqq \alpha_i < \left[\begin{matrix}\varepsilon_i\\ \omega\end{matrix}\right]$; wenn $\alpha_i < \omega$, setzen wir $\varepsilon_i = 2$. Zuerst behandeln wir (9b). Es sind folgende Fälle zu unterscheiden.

1) Die Folge $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ hat kein Maximum. Dann ist

$$\operatorname*{fin}_{n<\omega} \varepsilon_n = \operatorname*{fin}_{n<\omega} \alpha_n = \lim_{i<\omega} \varepsilon_{n_i} = \lim_{i<\omega} \alpha_{n_i}, \tag{21}$$

wo $\{n_0, n_1, n_2, \ldots\}$ eine geeignete Teilmenge von $\{0, 1, 2, \ldots\}$ ist, etwa diejenige Menge von Indizes n_i, welche zu den ε_{n_i} gehören, die übrigbleiben, wenn man aus der Folge $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ jedes Glied streicht, das nicht größer als sämtliche vorausgehenden ist; jedenfalls ist $n_0 = 0$. Nun wird (da aus $0 < \alpha < \varepsilon$, $0 < \beta < \varepsilon$ stets $\alpha^\beta < \varepsilon = 2^\varepsilon$ folgt):

$$\varepsilon_{n_i} < [\alpha_{n_i}, \alpha_{n_i-1}, \ldots, \alpha_1, \alpha_0] < \left[\begin{matrix}\varepsilon_{n_i}\\ \omega\end{matrix}\right] \leqq \varepsilon_{n_{i+1}}$$

für $i > 0$, also

$$[\ldots, \alpha_1, \alpha_0] = \lim_{i<\omega} \varepsilon_{n_i} = \operatorname*{fin}_{n<\omega} \alpha_n.$$

2) Die Folge (ε_i) hat ein Maximum ε. Es gibt zwei Möglichkeiten.

a) $\alpha_0 = \varepsilon$ und $\alpha_i < \varepsilon$ für $1 \leqq i < \omega$. Dann ist $\varepsilon \geqq \omega$ (wegen $\alpha_i \geqq 2$) und daher

$$[\ldots, \alpha_1, \alpha_0] = \alpha_0 = \varepsilon = \operatorname*{fin}_{n<\omega} \alpha_n.$$

b) Der Fall a) tritt nicht ein; dann gibt es entweder ein $\alpha_i \geqq \varepsilon + 1$ oder es gibt ein $\alpha_i = \varepsilon$ mit $i > 0$. In beiden Fällen hat man wegen $\alpha_i < \left[\begin{matrix}\varepsilon\\ \omega\end{matrix}\right]$:

$$\left[\begin{matrix}\varepsilon\\ \omega\end{matrix}\right] \geqq [\ldots, \alpha_1, \alpha_0] \geqq \left[\begin{matrix}2\\ \omega^*\end{matrix}, \varepsilon + 1\right] \doteq \left[\begin{matrix}\varepsilon\\ \omega\end{matrix}\right], \qquad \text{also}$$

$$[\ldots, \alpha_1, \alpha_0] = \left[\begin{matrix}\varepsilon\\ \omega\end{matrix}\right].$$

Setzen wir $\alpha = \operatorname{fin} \alpha_n$ $(n < \omega)$, so kann im ersten Fall jede der beiden Möglichkeiten

$$\alpha = \left[\begin{matrix}\varepsilon\\ \omega\end{matrix}\right]; \quad \alpha < \left[\begin{matrix}\varepsilon\\ \omega\end{matrix}\right] = \left[\begin{matrix}\alpha\\ \omega\end{matrix}\right],$$

im zweiten Fall nur die zweite zutreffen.

Im ganzen haben wir also das Resultat:

Satz 1. *Für $\alpha_i \geqq 2$ $(0 \leqq i < \omega)$ ist die Zahl $[\ldots, \alpha_1, \alpha_0]$ stets eine Zahl $\varepsilon = 2^\varepsilon$ und entweder gleich α oder gleich $\left[\begin{matrix}\alpha\\ \omega\end{matrix}\right]$, wobei $\alpha = \operatorname{fin} \alpha_n$ $(n < \omega)$.*

Daß für $\alpha_r \geqq 2$ auch das allgemeine Symbol (15) mit Limeszahl σ eine Zahl $\varepsilon = 2^\varepsilon$ darstellt, ergibt sich sofort durch transfinite Induktion.

Jetzt wollen wir feststellen, wann die Exponentenkette (9a) eine Zahl $\varepsilon = 2^\varepsilon$ darstellt. Wir haben wieder die zwei Fälle zu unterscheiden:

I) Die Folge $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ hat kein Maximum. Bei geeigneter Wahl einer Folge (n_i) gilt wieder (21) und analog wie im vorigen Fall 1) schließt man

$$\varepsilon_{n_i} \leqq [\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n_i-1}, \alpha_{n_i}] < \left[\frac{\varepsilon_{n_i}}{\omega}\right] \leqq \varepsilon_{n_{i+1}}, \qquad \text{also}$$

$$[\alpha_0, \alpha_1, \ldots] = \lim_{i<\omega} \varepsilon_{n_i} = \operatorname*{fin}_{n<\omega} \alpha_n.$$

II) Die Folge (ε_i) hat ein Maximum ε. Wieder gibt es zwei Unterfälle.

a) ε tritt in der Folge (ε_i) nur endlich oft auf. Dann gibt es ein i_0, so daß $\varepsilon_j < \varepsilon_{i_0} = \varepsilon$ für $j > i_0$ (woraus $\varepsilon \geqq \omega$ folgt) und $\alpha_j < \varepsilon \leqq \alpha_{i_0}$ ist. Daraus schließt man

$$[\alpha_0, \alpha_1, \ldots = [\alpha_0, \ldots, \alpha_{i_0}, [\alpha_{i_0+1}, \alpha_{i_0+2}, \ldots]] \leqq [\alpha_0, \ldots, \alpha_{i_0}, \varepsilon] < \left[\frac{\varepsilon}{\omega}\right].$$

Da ferner gilt

$$\varepsilon \leqq \alpha = \operatorname*{fin}_{n<\omega} \alpha_n = \max_{n<\omega} \alpha_n \leqq [\alpha_0, \ldots, \alpha_{i_0}] < \left[\frac{\varepsilon}{\omega}\right],$$

so kommt

$$\left[\frac{\alpha}{\omega}\right] = \left[\frac{\varepsilon}{\omega}\right] \text{ und } \alpha < [\alpha_0, \alpha_1, \ldots] < \left[\frac{\alpha}{\omega}\right].$$

Demnach ist $[\alpha_0, \alpha_1, \ldots]$ keine Zahl $\varepsilon = 2^\varepsilon$.

b) ε tritt unendlich oft in (ε_i) auf. Dann hat man $[\alpha_0, \ldots, \alpha_n] < \left[\frac{\varepsilon}{\omega}\right]$, also $[\alpha_0, \alpha_1, \ldots] \leqq \left[\frac{\varepsilon}{\omega}\right]$, aber auch $\left[\frac{\varepsilon}{n}\right] < [\alpha_0, \alpha_1, \ldots]$, somit $\left[\frac{\varepsilon}{\omega}\right] \leqq [\alpha_0, \alpha_1, \ldots]$ und daher

$$[\quad \alpha_1, \ldots] = \left[\frac{\varepsilon}{\omega}\right].$$

Mit Rücksicht darauf, daß bei IIb) wieder dieselben zwei Möglichkeiten hinsichtlich α bestehen wie bei 2b), können wir unsere Ergebnisse in dem Satz zusammenfassen:

Satz 2. *Wenn alle* $\alpha_i \geqq 2$ *sind* $(0 \leqq i < \omega)$ *und wenn* $\alpha = \operatorname{fin} \alpha_n$ $(n < \omega)$ *gesetzt wird, so ist die Zahl* $[\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots]$ *entweder gleich* α *oder gleich* $\left[\frac{\alpha}{\omega}\right]$ *und beidemal eine Zahl* $\varepsilon = 2^\varepsilon$, *oder es gilt* $\alpha < [\alpha_0, \alpha_1, \ldots] < \left[\frac{\alpha}{\omega}\right]$. *Der letzte Fall tritt dann und nur dann ein, wenn die Folge der* ε_i *eine nurendlich oft vorkommende größte Zahl enthält; dabei ist* $\varepsilon_i = 2$ *für* $\alpha_i < \omega$ *und* $2^{\varepsilon_i} = \varepsilon_i \leqq \alpha_i < \left[\frac{\varepsilon_i}{\omega}\right]$ *für* $\alpha_i \geqq \omega$.

6. Zum Schluß dieses Paragraphen beweisen wir die später zu verwendende Formel:

$$\alpha\beta^\alpha = \beta^\alpha \text{ für } \beta \geqq \omega,\ 1 \leqq \alpha < \left[\frac{\beta}{\omega}\right]. \tag{22}$$

Sie ist ein Teil von

Satz 3. *Die Beziehung*

$$\alpha\,\beta^{\alpha} > \beta^{\alpha} \quad (\beta \geqq 2)$$

ist genau dann erfüllt, wenn α *der Umgebung einer Zahl* $\varepsilon = \beta$ *angehört oder wenn gleichzeitig* $2 \leqq \beta < \omega$ *und* $2 \leqq \alpha < \omega$ *ist.*

Die „Umgebung" einer Zahl $\gamma \geqq \omega$ soll dabei folgendermaßen erklärt sein:

Definition 3. *Unter der Umgebung der transfiniten Ordnungszahl* $\gamma = \omega^{\nu} a + \eta$ $(1 \leqq a < \omega,\ \eta < \omega^{\nu})$ *sei die Menge aller Zahlen* σ *mit* $\omega^{\nu} \leqq \sigma < \omega^{\nu+1}$, *also die Menge der Zahlen* $\sigma = \omega^{\nu} n + \zeta$ *mit* $1 \leqq n < \omega$, $\zeta < \omega^{\nu}$ *verstanden.*

In der Tat, wenn $\varepsilon = 2^{\varepsilon} \geqq \left[\begin{smallmatrix}\beta\\ \omega\end{smallmatrix}\right]$, so wird für $\alpha = \varepsilon n + \zeta$ $(1 \leqq n < \omega,$ $\zeta < \varepsilon)$ nach (7) und (2)

$$\alpha\,\beta^{\alpha} = \varepsilon\,\beta^{\varepsilon n+\zeta} = \beta^{\varepsilon(n+1)+\zeta} > \beta^{\alpha}.$$

Ferner läßt sich jedes $\alpha \geqq \omega$ mittels eines bestimmten $\varepsilon = 2^{\varepsilon}$ eindeutig in der Form darstellen

$$\alpha = \varepsilon^{\gamma}\mu + \zeta \quad \left(1 \leqq \gamma < \left[\begin{smallmatrix}\varepsilon\\ \omega\end{smallmatrix}\right],\ 1 \leqq \mu < \varepsilon,\ \zeta < \varepsilon^{\gamma}\right). \tag{23}$$

Wir wählen $\alpha \geqq \left[\begin{smallmatrix}\beta\\ \omega\end{smallmatrix}\right]$ und bekommen mit Hilfe der Darstellung (23) wegen $\beta^{\alpha} = \varepsilon\,\beta^{-\varepsilon+\alpha}$:

$$\alpha\,\beta^{\alpha} = \varepsilon^{\gamma}\beta^{\alpha} = \beta^{\varepsilon\gamma+\alpha} = [\beta,\ \varepsilon(\gamma + \varepsilon^{-1+\gamma}\mu) + \zeta].$$

Nun wird aber $\gamma + \varepsilon^{-1+\gamma}\mu = \varepsilon^{-1+\gamma}\mu$, wenn $\gamma > 1$ oder wenn $\gamma = 1$ und $\mu \geqq \omega$, d. h. in beiden Fällen ergibt sich $\alpha\,\beta^{\alpha} = \beta^{\alpha}$. Damit ist Satz 3 für $\alpha \geqq \left[\begin{smallmatrix}\beta\\ \omega\end{smallmatrix}\right]$ beweisen. — Wenn β und α beide endlich sind, bedarf es keines Beweises; es bleibt daher nur noch die Relation (22) zu bestätigen.

Wir benötigen dazu die Hilfsformel

$$\tau + \beta^{\tau} = \beta^{\tau} \quad (\omega \leqq \beta,\ 0 \leqq \tau \leqq \beta \text{ oder } \beta < \tau < 2^{\tau}). \tag{24}$$

Für $\tau = 0$, $\tau = 1$ ist sie richtig, desgl. für $2 \leqq \tau \leqq \beta$, denn dann wird $\tau + \beta^{\tau} \leqq \beta + \beta^{\tau} = \beta^{\tau}$. Wenn aber $\beta < \tau$, also nach Voraussetzung $\tau < 2^{\tau} \leqq \omega^{\tau}$ ist, so folgt $\tau + \omega^{\tau} = \omega^{\tau}$ und erst recht (24).

Daß (22) für endliches $\alpha > 0$ sowie für unendliches $\alpha \leqq \beta$ richtig ist, liegt auf der Hand. Sei daher $\beta < \alpha < \left[\begin{smallmatrix}\beta\\ \omega\end{smallmatrix}\right]$; dann gibt es eine natürliche Zahl n, so daß

$$\left[\begin{smallmatrix}\beta\\ n\end{smallmatrix}\right] \leqq \alpha < \left[\begin{smallmatrix}\beta\\ n+1\end{smallmatrix}\right] \quad \text{wird, also}$$

$$\alpha = \beta^{\tau}\mu + \zeta \quad \left(1 \leqq \tau < \left[\begin{smallmatrix}\beta\\ n\end{smallmatrix}\right],\ 1 \leqq \mu < \beta,\ \zeta < \beta^{\tau}\right).$$

Dann ist aber

$$\beta^\tau \leqq \alpha < \beta^{\tau+1},\ \beta^{\tau+\varkappa} \leqq \alpha\beta^\varkappa \leqq \beta^{\tau+1+\varkappa} = \beta^{\tau+\varkappa},\ \text{d. h. } \alpha\beta^\varkappa = \beta^{\tau+\varkappa}.$$

Nun wird $\tau + \alpha = \tau + \beta^\tau + \beta^\tau(-1+\mu) + \zeta$, also wegen (24) $\tau + \alpha = \alpha$, und damit ist (22) bewiesen.

§ 2.

Monotone Funktionen. Unstetigkeitsstellen wachsender Funktionen.

1. Im Anschluß an § 1, Ziff. 2, vorletzter Absatz, definieren wir:

Definition 4. *Eine für alle $\alpha \geqq \alpha_0$ oder für alle α mit $\alpha_0 \leqq \alpha < \gamma$ definierte Funktion $f(\alpha)$, deren Werte wieder Ordnungszahlen sind, heiße halbnormal, wenn sie folgende Bedingungen erfüllt:*

$$f(\alpha) \leqq f(\beta) \text{ für } \alpha_0 \leqq \alpha < \beta$$
$$f(\lambda) = \operatorname{fin} f(\nu) \quad (\alpha_0 \leqq \nu < \lambda,\ \lambda \text{ Limeszahl}).$$

Eine Normalfunktion ist also stets halbnormal.

Wir können annehmen, daß eine halbnormale Funktion $f(\alpha)$ für alle $\alpha \geqq \alpha_0$ definiert sei; ist sie nur für $\alpha_0 \leqq \alpha < \gamma$ definiert, so setzen wir z. B.

$$f(\gamma) = \operatorname{fin} f(\nu) \quad (\alpha_0 \leqq \nu < \gamma),\quad f(\gamma+\xi) = f(\gamma) + \xi$$

und haben damit eine für alle $\alpha \geqq \alpha_0$ definierte halbnormale Funktion. — Ferner definieren wir:

Definition 5. *Die Zahl $\alpha > \alpha_0$ heiße eine Konstanzstelle der halbnormalen Funktion $f(\alpha)$, wenn es ein β mit $\alpha_0 \leqq \beta < \alpha$ gibt, so daß $f(\beta) = f(\alpha)$ ist. Alle anderen Argumente α von $f(\alpha)$ sollen Wachstumsstellen heißen.*

Wir bezeichnen die Wachstumsstellen der Größe nach geordnet, soweit sie vorhanden sind, mit

$$\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_\nu, \ldots \quad (\sigma_0 = \alpha_0).$$

Dabei gelten die Relationen

$$f(\sigma_\mu) < f(\sigma_\nu) \quad \text{für } \mu < \nu,$$
$$f(\alpha) = f(\sigma_\nu) \quad \text{für } \sigma_\nu \leqq \alpha < \sigma_{\nu+1}.$$

Wenn ν keine Limeszahl ist, so ist auch σ_ν keine; sonst wäre ja

$$f(\sigma_\nu) = \operatorname{fin} f(\xi) = f(\sigma_{\nu-1}) \quad (\sigma_{\nu-1} \leqq \xi < \sigma_\nu).$$

Umgekehrt aber ist

$$\sigma_\lambda = \lim \sigma_\nu \quad (\nu < \lambda).$$

Denn setzen wir $\sigma = \lim \sigma_\nu$ $(\nu < \lambda)$, so wird

$$f(\sigma) = \operatorname*{fin}_{\alpha_0 \leqq \xi < \sigma} f(\xi) = \lim_{\nu < \lambda} f(\sigma_\nu) > f(\alpha) \quad \text{für } \alpha_0 \leqq \alpha < \sigma,$$

d. h. σ ist Wachstumsstelle, also $\sigma = \sigma_\lambda$. Das besagt:

Satz 4. *Die Wachstumsstellen σ_ν einer halbnormalen Funktion $f(\alpha)$ bilden eine Normalfunktion $g(\nu) = \sigma_\nu$ für die vorhandenen Indizes ν, wobei σ_ν und ν stets gleichzeitig Limeszahlen sind.*

Wenn das Wachstum von $f(\alpha)$ beschränkt ist, d. h. wenn es eine Ordnungszahl ϱ gibt, jenseits derer keine σ_ν mehr liegen, oder anders ausgedrückt, wenn die Wachstumsstellen σ_ν eine (wohlgeordnete) *Menge* bilden, so gibt es eine *letzte* Wachstumsstelle σ_τ. Denn der Ordnungstypus der Menge aller σ_ν kann keine Limeszahl λ sein $(\nu < \lambda)$, weil sonst $\sigma_\lambda = \lim\limits_{\nu<\lambda} \sigma_\nu$ eine neue Wachstumsstelle wäre.

Sämtliche Werte, die $f(\alpha)$ annehmen kann, werden bereits geliefert durch die Normalfunktion

$$\tilde{f}(\nu) = f(\sigma_\nu) \quad (\nu \geqq 0).$$

Wenn $f(\alpha)$ unbeschränkt wächst, d. h. wenn es kein letztes σ_τ gibt, so ist $\tilde{f}(\nu)$ und ebenso $\tilde{f}(\sigma_\nu) = h(\nu)$ eine für alle $\nu \geqq 0$ definierte Normalfunktion und daher

$$\tilde{f}(\sigma_\nu) \geqq \sigma \geqq \nu \quad \text{für } \nu \geqq 0.$$

Ist nun $\varkappa = h(\varkappa) = \tilde{f}(\sigma_\varkappa)$ eine *kritische Zahl*[5]) der Normalfunktion $h(\nu)$, so muß $\varkappa = \tilde{f}(\sigma_\varkappa) = \sigma_\varkappa$, also $\varkappa$ auch kritische Zahl der Normalfunktion $g(\nu) = \sigma_\nu$ sein, und daraus folgt

$$\varkappa = \tilde{f}(\sigma_\varkappa) = \tilde{f}(\varkappa) = f(\sigma_\varkappa) = f(\varkappa).$$

Übertragen wir die Redewendung „kritische Zahl" auf halbnormale Funktionen, so können wir den Satz aussprechen:

Satz 5. *Wenn die halbnormale Funktion $f(\alpha)$ beliebig großer Werte fähig ist, so besitzt sie beliebig große kritische Zahlen $\varkappa = f(\varkappa)$.*

2. Unter Verzicht auf die zweite Forderung in der Definition 4 erklären wir nun:

Definition 6. *Eine für $\alpha \geqq \alpha_0$ oder für $\alpha_0 \leqq \alpha < \gamma$ definierte Funktion $\varphi(\alpha)$, deren Werte wieder Ordnungszahlen sind, heiße monoton, wenn*

$$\varphi(\alpha) \leqq \varphi(\beta) \quad \text{für } \alpha_0 \leqq \alpha < \beta,$$

und wachsend, wenn speziell

$$\varphi(\alpha) < \varphi(\beta) \quad \text{für } \alpha_0 \leqq \alpha < \beta \qquad \text{ist.}$$

Ist $\varphi(\nu)$ definiert für alle ν zwischen α_0 und der Limeszahl λ, so heiße die Zahl

$$\tilde{\varphi}(\lambda) = \operatorname{fin} \varphi(\nu) \quad (\alpha_0 \leqq \nu < \lambda)$$

der zu λ gehörige Grenzwert von $\varphi(\alpha)$. Wenn auch $\varphi(\lambda)$ definiert ist,

[5]) Nach Hausdorff heißt $\varkappa$ eine kritische Zahl einer Normalfunktion $f(\alpha)$, wenn $\varkappa = f(\varkappa)$ ist; vgl. a. a. O. [3]).

so heiße $\varphi(\alpha)$ an der Stelle $\alpha = \lambda$ stetig oder unstetig, je nachdem in der Ungleichung

$$\tilde{\varphi}(\lambda) \leqq \varphi(\lambda)$$

das untere oder das obere Zeichen gilt.

Wir können voraussetzen, daß $\varphi(\alpha)$ für alle $\alpha \geqq \alpha_0$ definiert sei; vgl. die entsprechende Bemerkung zur Definition 4. Ist insbesondere $\varphi(\alpha)$ als wachsende Funktion definiert für $\alpha_0 \leqq \alpha < \gamma$, so setzen wir (s. Definition 1)

$$\varphi(\gamma) = \operatorname{fin} \varphi(\nu) + \iota_\gamma \quad (\alpha_0 \leqq \nu < \gamma), \quad \varphi(\gamma + \xi) = \varphi(\gamma) + \xi$$

und erhalten eine für alle $\alpha \geqq \alpha_0$ definierte wachsende Funktion.

Wenn die monotone Funktion $\varphi(\alpha)$ Unstetigkeitsstellen besitzt, so ergänzen wir sie zu einer stetigen, d. h. halbnormalen Funktion mittels ihrer Grenzwerte $\tilde{\varphi}(\lambda)$ durch die Festsetzungen:

$$\begin{aligned}
&\tilde{\varphi}(\alpha_0 + n) = \varphi(\alpha_0 + n) \quad (0 \leqq n < \omega)\\
&\tilde{\varphi}(\omega\eta) = \operatorname{fin} \varphi(\nu) \quad (\alpha_0 \leqq \nu < \omega\eta)\\
&\tilde{\varphi}(\omega\eta + n) = \varphi(\omega\eta + n), \text{ wenn } \varphi(\omega\eta) = \tilde{\varphi}(\omega\eta) \Big\} 1 \leqq n < \omega,\\
&\tilde{\varphi}(\omega\eta + n) = \varphi(\omega\eta + n - 1), \text{ wenn } \varphi(\omega\eta) > \tilde{\varphi}(\omega\eta) \Big\} \omega\eta > \alpha_0.
\end{aligned} \tag{25}$$

Definition 7. *Die durch* (25) *bestimmte Funktion $\tilde{\varphi}(\alpha)$ heiße die zu der monotonen Funktion $\varphi(\alpha)$ gehörige halbnormale Funktion.*

Ist $\varphi(\alpha)$ *wachsend*, dann wird $\tilde{\varphi}(\lambda) = \lim \varphi(\nu)$ $(\alpha_0 \leqq \nu < \lambda)$, und die Gleichungen (25) definieren die zu $\varphi(\alpha)$ gehörige *Normalfunktion* $\tilde{\varphi}(\alpha)$. Wenn die wachsende Funktion $\varphi(\alpha)$ noch die Eigenschaft besitzt

$$\varphi(\alpha) > \alpha \quad \text{für } \alpha \geqq \beta_0 \geqq \alpha_0, \tag{26}$$

so hat $\varphi(\alpha)$ sicher Unstetigkeitsstellen, nämlich mindestens die kritischen Limeszahlen $\geqq \beta_0$ der Normalfunktion $\tilde{\varphi}(\alpha)$.

Beispiel einer unstetigen monotonen Funktion, die nicht ständig wächst, ist $\varphi(\alpha) = \begin{bmatrix}\alpha\\ \omega\end{bmatrix}$ mit $\alpha_0 = 1$; ihre Unstetigkeitsstellen sind die Zahlen $\varepsilon = 2^\varepsilon$ und es ist $\tilde{\varphi}(\varepsilon) = \varepsilon$.

3. Beispiel einer wachsenden unstetigen Funktion ist die in Satz 3 auftretende Funktion $\psi(\alpha) = \alpha\beta^\alpha$ für festes $\beta \geqq 2$. Da $\psi(\alpha) > \alpha$ für $\alpha \geqq 1$, so besitzt sie sicher Unstetigkeitsstellen, und zwar gilt

Satz 6. *Die Funktion $\psi(\alpha) = \alpha\beta^\alpha$ $(\beta \geqq 2)$ ist nur an den Stellen $\varepsilon = \beta^\varepsilon$ unstetig und es ist $\tilde{\psi}(\varepsilon) = \varepsilon$ für $\varepsilon = \beta^\varepsilon$.*

Denn nach Satz 3 kommen für $\psi(\alpha)$ nur die λ mit $\begin{bmatrix}\beta\\ \omega\end{bmatrix} \leqq \varepsilon \leqq \lambda \leqq \varepsilon\omega$ als Unstetigkeitsstellen in Frage. Wenn $\lambda = \varepsilon$, so ist $\psi(\varepsilon) = \varepsilon^2$, $\psi(\alpha) < \varepsilon$ für $\alpha < \varepsilon$, also $\tilde{\psi}(\varepsilon) = \varepsilon < \psi(\varepsilon)$ und somit ε Unstetigkeitsstelle. Wenn $\lambda = \varepsilon\omega$, so wird nach Satz 3 $\psi(\varepsilon\omega) = \beta^{\varepsilon\omega} = \varepsilon^\omega$; ferner wird

$$\psi(\varepsilon n) = \varepsilon n\beta^{\varepsilon n} = \varepsilon^{n+1}, \quad \tilde{\psi}(\varepsilon\omega) = \lim_{n<\omega} \varepsilon^{n+1} = \varepsilon^\omega = \psi(\varepsilon\omega).$$

Es muß also nur noch das Verhalten von $\psi(\alpha)$ an den Limesstellen der Form

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon m + \lambda &= \lim_{\zeta<\lambda} (\varepsilon m + \zeta) \quad (\lambda < \varepsilon) \\ \varepsilon(m+1) &= \lim_{\zeta<\varepsilon} (\varepsilon m + \zeta) \end{aligned}\right\} 1 \leqq m < \omega$$

untersucht werden. Dabei ergibt sich

$$\psi(\varepsilon m + \zeta) = (\varepsilon m + \zeta)\beta^{\varepsilon m + \zeta} = \varepsilon^{m+1}\beta^{\zeta},$$

$$\psi(\varepsilon m + \lambda) = \varepsilon^{m+1}\beta^{\lambda} = \lim \psi(\varepsilon m + \zeta) \quad (\zeta < \lambda),$$

$$\psi(\varepsilon(m+1)) = \varepsilon^{m+2} = \lim \psi(\varepsilon m + \zeta) \quad (\zeta < \varepsilon).$$

Als weiteres Beispiel betrachten wir die Funktion $\varphi(\alpha) = \alpha q$ für festes endliches $q \geqq 2$, welche stets wächst und für $\alpha \geqq 1$ die Eigenschaft (26) besitzt; es gilt der

Satz 7. *Die kritischen Zahlen der Normalfunktion $\tilde{\varphi}(\alpha)$, welche zu der wachsenden Funktion*

$$\varphi(\alpha) = \alpha q \quad (2 \leqq q < \omega,\ \alpha \geqq 0)$$

gehört, sind die Zahlen ω^{τ} $(\tau \geqq 1)$. — Die Unstetigkeitsstellen von $\varphi(\alpha) = \alpha q$ sind die Zahlen

$$\omega^{\tau} m \quad (\tau \geqq 1,\ 1 \leqq m < \omega),$$

und die zugehörigen Grenzwerte sind $\omega^{\tau}((m-1)q+1)$.

Zunächst sieht man, daß die kritischen Zahlen >0 von $\tilde{\varphi}(\alpha)$ Limeszahlen sind; denn für $1 \leqq \alpha < \omega$ ist $\tilde{\varphi}(\alpha) = \alpha q > \alpha$, für $\alpha \geqq \omega$ aber gilt $\tilde{\varphi}(\alpha+1) \geqq \varphi(\alpha) = \alpha q > \alpha + 1$. Soll nun

$$\lambda = \tilde{\varphi}(\lambda) = \lim \nu q \quad (\nu < \lambda)$$

sein, so muß für $\alpha < \lambda$, $\beta < \lambda$ stets $\alpha + \beta \leqq \max(\alpha, \beta) \cdot 2 < \lambda$ ausfallen, also gelten:

$$\lim_{\beta<\lambda} (\alpha + \beta) = \alpha + \lambda = \lim_{\nu<\lambda} \nu = \lambda,$$

d. h. es muß $\lambda = \omega^{\tau}$ $(\tau \geqq 1)$ sein. Daß umgekehrt $\lim\limits_{\nu<\omega^{\tau}} \nu q = \omega^{\tau}$ ist, liegt auf der Hand.

Damit ist die erste Hälfte von Satz 7 bewiesen, und wegen des Zutreffens von (26) sind die Zahlen $\omega^{\tau} \geqq \omega$ Unstetigkeitsstellen von $\varphi(\alpha) = \alpha q$. Um die zweite Hälfte nun vollends zu beweisen, bemerken wir, daß es zwei Formen von Limeszahlen $\lambda \neq \omega^{\tau}$ gibt:

$$(27)\quad \left.\begin{aligned} &\text{(a)} \quad \omega^{\tau} m + \lambda = \lim_{\zeta<\lambda} (\omega^{\tau} m + \zeta) \quad (\tau \geqq 2,\ \lambda < \omega^{\tau}) \\ &\text{(b)} \quad \omega^{\tau}(m+1) = \lim_{\zeta<\omega^{\tau}} (\omega^{\tau} m + \zeta) \quad (\tau \geqq 1) \end{aligned}\right\} 1 \leqq m < \omega.$$

Die Zahlen (27 a) sind keine Unstetigkeitsstellen, denn es wird

$$\lim_{\zeta<\lambda}(\omega^\tau m+\zeta)q=\lim_{\zeta<\lambda}(\omega^\tau mq+\zeta)=\omega^\tau mq+\lambda=(\omega^\tau m+\lambda)q;$$

dagegen hat man für eine Zahl (27 b):

$$\lim_{\zeta<\omega^\tau}(\omega^\tau m+\zeta)q=\omega^\tau mq+\omega^\tau=\omega^\tau(mq+1)<\omega^\tau(m+1)q.$$

4. Jetzt untersuchen wir die wachsenden Funktionen

$$\varphi_{pq\tau}(\alpha)=\left[\begin{matrix}\alpha\\ p-2\end{matrix},\alpha^\tau,\alpha^q\right]\quad(1\leqq p<\omega,\ 1\leqq q<\omega,\ 1\leqq\tau<\omega,\ \alpha\geqq 1). \tag{28}$$

Damit die vorstehende Definition für $p=1$ einen Sinn habe, treffen wir die formale Festsetzung, daß

$$\varphi_{1q\tau}(\alpha)=\left[\begin{matrix}\alpha\\ -1\end{matrix},\alpha^\tau,\alpha^q\right]=\alpha^q \tag{29}$$

sein solle. Ferner wollen wir schreiben

$$\varphi_{pq1}(\alpha)=\varphi_{pq}(\alpha)=\left[\begin{matrix}\alpha\\ p-1\end{matrix},\alpha^q\right], \tag{30}$$

was für $p=1$ mit (29) im Einklang steht. — Mit Ausnahme der Funktion $\varphi_{11}(\alpha)=\alpha$ besitzt jede Funktion $\varphi_{pq\tau}(\alpha)$ Unstetigkeitsstellen, denn für $p+q>2$ und $\alpha\geqq 2$ ist (26) erfüllt.

Man möchte vielleicht annehmen, daß die Funktion

$$\varphi_{pq_1\dots q_p}(\alpha)=[\alpha^{q_p},\dots,\alpha^{q_1}]$$

allgemeiner als die Funktion (28) sei; das ist jedoch für transfinite α nicht der Fall. Denn da $[\alpha^{q_2},\alpha^{q_1}]$ für $\alpha\geqq\omega$ eine Limeszahl ist, so wird für $p\geqq 3$:

$$\varphi_{pq_1\dots q_p}(\alpha)=\varphi_{pq_1q_2 1\dots 1}(\alpha)=\varphi_{pq_1q_2}(\alpha).$$

Es bestehen nun die Beziehungen

$$\begin{matrix}(a)\quad\varphi_{pq\tau}(\lambda)=\varphi_{pq}(\lambda)\\ (b)\quad\tilde{\varphi}_{pq\tau}(\lambda)=\tilde{\varphi}_{pq}(\lambda)\end{matrix}\quad(\lambda\text{ Limeszahl}), \tag{31}$$

aus denen sich ergibt, daß die Funktionen $\varphi_{pq\tau}(\alpha)$ und $\varphi_{pq}(\alpha)$ dieselben Unstetigkeitsstellen und Grenzwerte besitzen. Für $p=1$ ist nichts zu beweisen, ebenso ist (31 a) trivial für alle p. (31 b) ist richtig, wenn $\lambda=\omega$, ferner wenn $\lambda=\lim\lambda_\sigma$ $(\sigma<\varrho)$ als Limes von Limeszahlen λ_σ darstellbar ist, denn dann gilt

$$\tilde{\varphi}_{pq\tau}(\lambda)=\lim_{\sigma<\varrho}\varphi_{pq\tau}(\lambda_\sigma)=\lim_{\sigma<\varrho}\varphi_{pq}(\lambda_\sigma)=\tilde{\varphi}_{pq}(\lambda).$$

Wir haben also (31 b) noch zu beweisen für Limeszahlen der Form $\lambda+\omega$. Zunächst sei $p=2$. Dann ergibt sich vermöge (3) und (6) für $1\leqq l<\omega$:

$$\varphi_{2q\tau}(\lambda+l)=(\lambda+l)^{\tau(\lambda+l)^q}=\lambda^{\lambda^q+\tau\lambda^{q-1}l+\cdots}+\vartheta(l),$$

und daraus folgt in der Tat, daß

$$\tilde{\varphi}_{2q\tau}(\lambda+\omega)=\lim_{l<\omega}\varphi_{2q\tau}(\lambda+l)=\lambda^{\lambda^q+\lambda^{q-1}\omega}$$

unabhängig von r, also gleich $\tilde{\varphi}_{2q}(\lambda+\omega)$ ist. — Wenn jetzt $p \geqq 3$, dann wird nach (19)

$$\varphi_{pqr}(\lambda+l) = \left[{}^{\lambda+l}_{p-2},\ \varphi_{2qr}(\lambda+l)\right] = \left[{}^{\lambda}_{p-2},\ \varphi_{2qr}(\lambda+l)\right] \quad \text{und daher}$$

$$\tilde{\varphi}_{pqr}(\lambda+\omega) = \lim_{l<\omega} \varphi_{pqr}(\lambda+l) = \left[{}^{\lambda}_{p-2},\ \tilde{\varphi}_{2q}(\lambda+\omega)\right]$$

wieder unabhängig von r, also also gleich $\tilde{\varphi}_{pq}(\lambda+\omega)$.

Zwecks Feststellung der Unstetigkeitsstellen genügt es somit, die Funktionen $\varphi_{pq}(\alpha)$ zu betrachten.

5. Es soll jetzt der folgende Satz bewiesen werden:

Satz 8. *Die kritischen Zahlen der zu* $\varphi_{1q}(\alpha) = \alpha^q$ $(2 \leqq q < \omega)$ *gehörigen Normalfunktion* $\tilde{\varphi}_{1q}(\alpha)$ *sind (außer* $\alpha = 0$ *und* $\alpha = 1$*) die* δ*-Zahlen* $\alpha = \omega^{\omega^\nu}$. — *Die kritischen Zahlen der zu* $\varphi_{pq}(\alpha) = \left[{}^{\alpha}_{p-1},\ \alpha^q\right]$ $(2 \leqq p < \omega,\ 1 \leqq q < \omega)$ *gehörigen Normalfunktion* $\tilde{\varphi}_{pq}(\alpha)$ *sind* $\alpha = 1$ *und die* ε*-Zahlen* $\alpha = 2^\alpha$*; dasselbe gilt für die Funktion* $\varphi_{pqr}(\alpha)$ $(p \geqq 2)$.

Daß $\tilde{\varphi}_{1q}(\delta) = \lim\limits_{\eta<\delta} \eta^q = \delta$ ist, folgt aus der Relation $\xi\eta < \delta$, die für beliebige $\xi < \delta$, $\eta < \delta$ gilt; analog folgt

$$\tilde{\varphi}_{pq}(\varepsilon) = \lim_{1\leqq\eta<\varepsilon} \left[{}^{\eta}_{p-1},\ \eta^q\right] = \varepsilon$$

aufgrund der für $1 \leqq \xi < \varepsilon$, $\eta < \varepsilon$ richtigen Ungleichung $\xi\eta < \varepsilon$.

Ferner sind alle kritischen Zahlen $\alpha > 1$ von $\tilde{\varphi}_{pqr}(\alpha)$ mit $p+q > 2$ Limeszahlen, denn man hat nach (25):

$$\tilde{\varphi}_{pqr}(\alpha+1) \geqq \varphi_{pqr}(\alpha) > \alpha+1 \quad \text{für } \alpha \geqq 2.$$

Sei daher $\lambda = \tilde{\varphi}_{1q}(\lambda) = \lim \eta^q$ $(\eta^* < \lambda)$ mit $q \geqq 2$; dann wird mit $\xi < \lambda$, $\eta < \lambda$ auch $\xi\eta \leqq \mu^2 < \lambda$, wo $\mu = \max(\xi, \eta)$; d. h. für $0 < \xi < \lambda$ gilt: $\xi\lambda = \lim\limits_{\eta<\lambda} \xi\eta = \lim\limits_{\zeta<\lambda} \zeta = \lambda$, was besagt, daß λ eine δ-Zahl ist. — Sei weiterhin $\lambda = \tilde{\varphi}_{pq}(\lambda) = \lim\limits_{\eta<\lambda} \left[{}^{\eta}_{p-1},\ \eta^q\right]$, wo $p \geqq 2$. Daraus folgt, daß für zwei beliebige Zahlen ξ, η zwischen 1 und λ auch $\xi^\eta \leqq \mu^\mu < \lambda$ ist $(\mu = \max(\xi, \eta))$; somit wird $2^\lambda = \lim\limits_{\nu<\lambda} 2^\nu = \lim\limits_{\eta<\lambda} \eta = \lambda$, also in der Tat λ eine ε-Zahl. — Damit ist der obige Satz bewiesen, wenn man noch (31 b) berücksichtigt.

6. Um die Unstetigkeitsstellen von $\varphi_{pq}(\alpha)$ aufzusuchen, benötigen wir noch einige Formeln. Zunächst soll bewiesen werden, daß gilt:

$$\tilde{\varphi}_{pq}(\alpha+\lambda) = \lim_{\beta<\lambda} \left[{}^{\alpha+\beta}_{p-1},\ (\alpha+\beta)^q\right] = \left[{}^{\alpha}_{p-1},\ \alpha^q + \alpha^{q-1}\lambda\right], \tag{32}$$

wenn $\beta + \alpha = \alpha$ für $\beta < \lambda$ und $1 \leqq p < \omega$, $1 \leqq q < \omega$.

Aufgrund von (6) bekommt man nämlich

$$(\alpha+\beta)^{(\alpha+\beta)^q} = \alpha^{(\alpha+\beta)^q} + \vartheta(\beta) = [\alpha,\ \alpha^q + \alpha^{q-1}\beta + \vartheta'(\beta)] + \vartheta(\beta),$$

und daraus erschließt man durch Limesbildung die Relation (32) für $p = 2$. Dann folgt (32) für $p \geqq 3$ aus

$$\left[\begin{matrix}\alpha+\beta\\ p-1\end{matrix}, (\alpha+\beta)^q\right] = \left[\begin{matrix}\alpha\\ p-2\end{matrix}, (\alpha+\beta)^{(\alpha+\beta)^q}\right] \quad \text{(vgl. 19)}.$$

Für $p = 1$ entnimmt man (32) mittels Limesbildung aus (3).

Wenn auch noch $\lambda + \alpha = \alpha$ ist, so liefert (32):

$$\tilde{\varphi}_{pq}(\alpha+\lambda) = \varphi_{pq}(\alpha+\lambda) \quad (\lambda+\alpha=\alpha,\ 1 \leqq p < \omega,\ 1 \leqq q < \omega). \tag{33}$$

Denn für $p = 1$ ist (33) richtig wegen (3), und für $p \geqq 2$ findet man vermöge (5) mit oder ohne Hilfe von (19), daß der dritte Ausdruck in (32) die Gestalt hat

$$\left[\begin{matrix}\alpha\\ p-2\end{matrix}, (\alpha+\lambda)^{(\alpha+\lambda)^q}\right] = \left[\begin{matrix}\alpha+\lambda\\ p-1\end{matrix}, (\alpha+\lambda)^q\right] = \varphi_{pq}(\alpha+\lambda).$$

7. Jetzt wollen wir die Grenzwerte $\varphi_{pq}(\lambda)$ bestimmen für Limeszahlen λ, die keine δ-Zahlen sind. Jede Zahl $\alpha \geqq \omega$ kann eindeutig in der Form

$$\alpha = \delta^n\gamma + \eta \quad (1 \leqq n < \omega,\ 1 \leqq \gamma < \delta = \omega^{\omega^\nu},\ \eta < \delta^n) \tag{34}$$

dargestellt werden. Also gibt es folgende Typen von Limeszahlen zwischen δ und δ^ω:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{(a)} & \delta^n\gamma + \lambda = \lim\limits_{\eta<\lambda} (\delta^n\gamma+\eta) & (\omega \leqq \lambda < \delta^n) \\ \text{(b)} & \delta^n(\gamma+1) = \lim\limits_{\eta<\delta^n} (\delta^n\gamma+\eta) & (1 \leqq \gamma < \delta) \\ \text{(c)} & \delta^n\lambda = \lim\limits_{\eta<\lambda} \delta^n\eta & (\omega \leqq \lambda < \delta) \\ \text{(d)} & \delta^{n+1} = \lim\limits_{\eta<\delta} \delta^n\eta & \end{array}\right\} 1 \leqq n < \omega. \tag{35}$$

Gemäß (33) ist $\varphi_{pq}(\alpha)$ für Limesargumente der Form (35 a) stetig; vermöge (32) wird für Zahlen (35 b) wegen (4):

$$\tilde{\varphi}_{pq}(\delta^n(\gamma+1)) = \left[\begin{matrix}\delta^n\gamma\\ p-1\end{matrix}, (\delta^n\gamma)^q + (\delta^n\gamma)^{q-1}\delta^n\right] = \left[\begin{matrix}\delta^n\gamma\\ p-1\end{matrix}, \delta^{nq}(\gamma+1)\right]$$

$$= \left[\begin{matrix}\delta^n(\gamma+1)\\ p-1\end{matrix}, (\delta^n(\gamma+1))^q\right] = \varphi_{pq}(\delta^n(\gamma+1)),$$

es herrscht also wiederum Stetigkeit. — Nun bleibt noch das Verhalten an Limesstellen der Form (35 c, d) zu untersuchen. Es wird vermöge (4) und (19)

$$\varphi_{pq}(\delta^n\eta) = \left[\begin{matrix}\delta^n\eta\\ p-1\end{matrix}, (\delta^n\eta)^q\right] = \left[\begin{matrix}\delta\\ p-1\end{matrix}, \delta^{nq}\eta\right], \text{ also}$$

$$\tilde{\varphi}_{pq}(\delta^n\lambda) = \lim_{\eta<\lambda}\left[\begin{matrix}\delta\\ p-1\end{matrix}, \delta^{nq}\eta\right] = \left[\begin{matrix}\delta\\ p-1\end{matrix}, \delta^{nq}\lambda\right] \quad (\lambda \leqq \delta). \tag{36}$$

Wenn $\lambda < \delta$, so wird der letzte Ausdruck gleich $\left[\begin{matrix}\delta^n\lambda\\ p-1\end{matrix}, (\delta^n\lambda)^q\right] = \varphi_{pq}(\delta^n\lambda)$, d. h. $\varphi_{pq}(\alpha)$ ist für $\alpha = \delta^n\lambda$ $(\lambda < \delta)$ stetig. — Wenn dagegen $\lambda = \delta$ ist, so ergibt sich aus (36) die Ungleichung

$$\tilde{\varphi}_{pq}(\delta^{n+1}) = \left[\begin{matrix}\delta\\ p-1\end{matrix}, \delta^{nq+1}\right] = \varphi_{p,nq+1}(\delta) \leqq \left[\begin{matrix}\delta^{n+1}\\ p-1\end{matrix}, \delta^{nq+q}\right] = \varphi_{pq}(\delta^{n+1}),$$

und hierin gilt das obere oder untere Zeichen, je nachdem $q \geqq 2$ oder $q = 1$ ist. Demnach ist $\varphi_{p1}(\alpha)$ für $\alpha = \delta^{n+1}$ immer noch stetig, $\varphi_{pq}(\alpha)$ mit $q \geqq 2$ jedoch nicht.

8. Schließlich müssen wir noch $\tilde{\varphi}_{pq}(\delta)$ $(p \geqq 2)$ bestimmen für diejenigen δ-Zahlen, welche keine ε-Zahlen sind. Sind δ, δ' zwei verschiedene δ-Zahlen, etwa

$$\delta = \omega^\omega < \delta' = \omega^{\omega^{\nu'}}, \text{ also } \nu < \nu', \qquad \text{so ist}$$

$$\delta' = \omega^{\omega^\nu + (-\nu+\nu')} = \omega^{\omega^\nu(\omega^{-\nu+\nu'})}, \text{ d. h. } \delta' = \delta^{\omega^\tau}.$$

Ist daher ε die zu einer δ-Zahl δ gehörige ε-Zahl mit der Eigenschaft $\varepsilon \leqq \delta < \left[\begin{matrix}\varepsilon\\ \omega\end{matrix}\right]$, dann muß, da die ε-Zahlen δ-Zahlen sind, $\delta = \varepsilon^{\omega^\tau}$ sein mit $0 \leqq \tau < \left[\begin{matrix}\varepsilon\\ \omega\end{matrix}\right]$. Für unseren obengenannten Zweck haben wir die beiden Fälle $\tau = \sigma + 1$ und $\tau = \lambda$ (Limeszahl) zu unterscheiden. Setzen wir

$$\delta_0 = \varepsilon^{\omega^\sigma}, \text{ also } \delta = \varepsilon^{\omega^{\sigma+1}} = \delta_0^\omega, \qquad \text{so kommt}$$

$$\tilde{\varphi}_{pq}(\delta) = \lim_{n<\omega} \varphi_{pq}(\delta_0^n) = \lim_{n<\omega}\left[\begin{matrix}\delta_0^n\\ p-1\end{matrix}, \delta_0^{nq}\right] = \lim_{n<\omega}\left[\begin{matrix}\delta_0\\ p-1\end{matrix}, \delta_0^{nq}\right]$$

$$= \left[\begin{matrix}\delta_0\\ p-1\end{matrix}, \delta_0^\omega\right] = \left[\begin{matrix}\delta^\omega\\ p-1\end{matrix}, \delta_0^\omega\right] = \varphi_{p1}(\delta) \leqq \left[\begin{matrix}\delta\\ p-1\end{matrix}, \delta^q\right] = \varphi_{pq}(\delta),$$

je nachdem $q \geqq 2$ oder $q = 1$ ist. — Sei jetzt $\tau = \lambda < \left[\begin{matrix}\varepsilon\\ \omega\end{matrix}\right]$, also $\delta = \varepsilon^\omega = \lim \varepsilon^{\omega^\nu}$ $(\nu < \lambda)$. Mit Rücksicht auf (22) wird

$$\varphi_{pq}(\varepsilon^{\omega^\nu}) = \left[\begin{matrix}\varepsilon^{\omega^\nu}\\ p-1\end{matrix}, \varepsilon^{\omega^\nu q}\right] = \left[\begin{matrix}\varepsilon^{\omega^\nu}\\ p-2\end{matrix}, [\varepsilon^{\omega^\nu}, \varepsilon^{\omega^\nu q}]\right] = \left[\begin{matrix}\varepsilon\\ p-2\end{matrix}, [\varepsilon, \varepsilon^{\omega^\nu q}]\right]$$

$$= \left[\begin{matrix}\varepsilon\\ p-1\end{matrix}, \varepsilon^{\omega^\nu q}\right],$$

daher nach Satz 7 oder 8 und (22)

$$\tilde{\varphi}_{pq}(\delta) = \lim_{\nu<\lambda} \varphi_{pq}(\varepsilon^{\omega^\nu}) = \left[\begin{matrix}\varepsilon\\ p-1\end{matrix}, \varepsilon^{\omega^\lambda}\right] = \left[\begin{matrix}\varepsilon^{\omega\lambda}\\ p-1\end{matrix}, \varepsilon^{\omega^\lambda}\right] = \varphi_{p1}(\delta) \leqq \varphi_{pq}(\delta),$$

wobei wieder das Zeichen $<$ oder $=$ steht, je nachdem $q \geqq 2$ oder $q = 1$ ist.

In Verbindung mit Satz 8 können wir daher zusammenfassend sagen:

Satz 9. *Die Zahlen* $\varepsilon = 2^{\varepsilon}$ *sind die einzigen Unstetigkeitsstellen der Funktion* $\varphi_{p1}(\alpha) = \left[\begin{matrix}\alpha\\ p\end{matrix}\right]$ *für* $2 \leqq p < \omega$. — *Die Unstetigkeitsstellen der Funktion* $\varphi_{pq}(\alpha) = \left[\begin{matrix}\alpha\\ p-1\end{matrix}, \alpha^q\right]$ *mit* $1 \leqq p < \omega$, $2 \leqq q < \omega$ *sind die Zahlen* δ^n *mit* $\delta = \omega^{\omega^\nu}$, $1 \leqq n < \omega$; *die zugehörigen Grenzwerte sind* $\tilde{\varphi}_{pq}(\varepsilon) = \varepsilon$ *für* $\delta^n = \varepsilon$ $(n = 1)$ *und*

$$\tilde{\varphi}_{pq}(\delta^n) = \varphi_{p,(n-1)q+1}(\delta) = \varphi_{p1}(\delta^{(n-1)q+1}) \text{ für } \delta^n + p - 1 \leqq 2^{\delta^n}.$$

9. Den obigen Satz kann man vielleicht etwas einfacher beweisen, indem man von der Darstellung (23) ausgeht, die für jedes transfinite α auf genau eine Weise möglich ist. Dann hat man folgende Typen von Limeszahlen zwischen ε und $\left[\begin{matrix}\varepsilon\\ \omega\end{matrix}\right]$:

$$\left.\begin{aligned}
&\text{(a)} \quad \varepsilon^\gamma \mu + \lambda = \lim_{\zeta < \lambda} (\varepsilon^\gamma \mu + \zeta) \quad (\omega \leqq \lambda < \varepsilon^\gamma)\\
&\text{(b)} \quad \varepsilon^\gamma (\mu + 1) = \lim_{\zeta < \varepsilon^\gamma} (\varepsilon^\gamma \mu + \zeta) \quad (1 \leqq \mu < \varepsilon)\\
&\text{(c)} \quad \varepsilon^\gamma \lambda = \lim_{\zeta < \lambda} \varepsilon^\gamma \zeta \quad (\omega \leqq \lambda < \varepsilon)
\end{aligned}\right\} 1 \leqq \gamma < \left[\begin{matrix}\varepsilon\\ \omega\end{matrix}\right] \tag{37}$$

$$\text{(d)} \quad \varepsilon^{\gamma+1} = \lim_{\zeta < \varepsilon} \varepsilon^\gamma \zeta \quad \left(1 \leqq \gamma < \left[\begin{matrix}\varepsilon\\ \omega\end{matrix}\right]\right)$$

$$\text{(e)} \quad \varepsilon^\lambda = \lim_{\zeta < \lambda} \varepsilon^\zeta \quad \left(\omega \leqq \lambda < \left[\begin{matrix}\varepsilon\\ \omega\end{matrix}\right]\right).$$

Aufgrund von (33) erkennt man die Stetigkeit von $\varphi_{pq}(\alpha)$ an einer Limesstelle α der Form (37 a), während (32) liefert:

$$\varphi_{pq}(\varepsilon^\gamma(\mu+1)) = \left[\begin{matrix}\varepsilon^\gamma \mu\\ p-1\end{matrix}, (\varepsilon^\gamma \mu)^q + (\varepsilon^\gamma \mu)^{q-1} \varepsilon^\gamma\right] = \left[\begin{matrix}\varepsilon^\gamma \mu\\ p-1\end{matrix}, \varepsilon^{\gamma q}(\mu+1)\right]$$
$$= \varphi_{pq}(\varepsilon^\gamma(\mu+1)),$$

d. h. die Stetigkeit an den Stellen (37 b). Ferner wird nach (4), (19) und (22):

$$\varphi_{pq}(\varepsilon^\gamma \zeta) = \left[\begin{matrix}\varepsilon^\gamma \zeta\\ p-1\end{matrix}, \varepsilon^{\gamma q} \zeta\right] = \left[\begin{matrix}\varepsilon\\ p-1\end{matrix}, \varepsilon^{\gamma q} \zeta\right],$$

woraus für $\lambda < \varepsilon$ folgt:

$$\tilde{\varphi}_{pq}(\varepsilon^\gamma \lambda) = \lim_{\zeta < \lambda} \left[\begin{matrix}\varepsilon\\ p-1\end{matrix}, \varepsilon^{\gamma q} \zeta\right] = \varphi_{pq}(\varepsilon^\gamma \lambda),$$

für $\lambda = \varepsilon$ jedoch:

$$\tilde{\varphi}_{pq}(\varepsilon^{\gamma+1}) = \left[\begin{matrix}\varepsilon\\ p-1\end{matrix}, \varepsilon^{\gamma q+1}\right].$$

Also hat man Stetigkeit auch für die Argumente (37 c), dagegen nicht für alle Argumente (37 d). Wenn freilich $\gamma \geqq \omega$, so wird nach (2) $\gamma q + 1 = (\gamma + 1) q$, und obige Gleichung zeigt, daß auch gilt

$$\tilde{\varphi}_{pq}(\varepsilon^{\gamma+1}) = \varphi_{pq}(\varepsilon^{\gamma+1}) \quad \text{für } \gamma \geqq \omega.$$

Ist jedoch $1 \leqq \gamma = n < \omega$, so kommt

$$\tilde{\varphi}_{pq}(\varepsilon^{n+1}) = \varphi_{p,nq+1}(\varepsilon) \leqq \varphi_{pq}(\varepsilon^{n+1}) \quad (1 \leqq n < \omega)$$

mit dem oberen oder unteren Zeichen, je nachdem $q >$ oder $= 1$ ist. — Endlich wird hinsichtlich der Argumente (37 e):

$$\tilde{\varphi}_{pq}(\varepsilon^{\lambda}) = \lim_{\zeta < \lambda} \varphi_{pq}(\varepsilon^{\zeta}) = \lim_{\zeta < \lambda} \left[{}^{\varepsilon}_{p-1}, \varepsilon^{\zeta q} \right] = \left[{}^{\varepsilon}_{p-1}, \varepsilon^{\lim \zeta q} \right] \quad (\zeta < \lambda);$$

für $q = 1$ ist also $\tilde{\varphi}_{p1}(\varepsilon^{\lambda}) = \varphi_{p1}(\varepsilon^{\lambda})$; für $q \geqq 2$ aber ist nach Satz 7 der Limes von $\zeta q\,(\zeta < \lambda)$ dann und nur dann gleich λq und damit $\tilde{\varphi}_{pq}(\varepsilon^{\lambda}) = \varphi_{pq}(\varepsilon^{\lambda})$, wenn λ *nicht* die Gestalt $\omega^{\tau} m$ hat, während für $\lambda = \omega^{\tau} m$ Unstetigkeit eintritt:

$$\tilde{\varphi}_{pq}(\varepsilon^{\omega^{\tau} m}) = \left[{}^{\varepsilon}_{p-1}, \varepsilon^{\omega^{\tau}((m-1)q+1)} \right] = \varphi_{p,(m-1)q+1}(\varepsilon^{\omega^{\tau}}) < \varphi_{pq}(\varepsilon^{\omega^{\tau} m})$$
$$\left(1 \leqq m < \omega, \quad 1 \leqq \tau < \left[{}^{\varepsilon}_{\omega} \right]\right).$$

Es ist aber $\varepsilon^{\omega^{\tau} m} = \delta^{m}$ mit $\delta = \varepsilon^{\omega^{\tau}}$, und durch $\varepsilon^{\omega^{\tau}} \left(1 \leqq \tau < \left[{}^{\varepsilon}_{\omega} \right]\right)$ kann jede δ-Zahl zwischen ε und $\left[{}^{\varepsilon}_{\omega} \right]$ dargestellt werden.

Damit ist der Satz 9 wiederum bewiesen.

§ 3.

Die Funktionen $\sigma_{pqr}(\alpha)$.

1. Die im vorangehenden § gewonnenen Ergebnisse hinsichtlich der Funktionen $\varphi_{pqr}(\alpha)$ wollen wir benutzen, um die Werte der Funktionen $\sigma_{pqr}(\alpha)$ und $\pi_{pqr}(\alpha)$ zu bestimmen (vgl. Vorbemerkung). Die ersteren Funktionen definieren wir als Normalfunktionen wie folgt:

$$(38) \qquad \sigma_{pqr}(\alpha) = \sum_{1 \leqq \nu < \alpha} \varphi_{pqr}(\nu) \quad (1 \leqq p < \omega,\ 1 \leqq q < \omega,\ 1 \leqq r < \omega,\ \alpha \geqq 2);$$

es sei dabei an die Festsetzung (29) erinnert. Analog zu (30) schreiben wir

$$(39) \qquad \sigma_{pq1}(\alpha) = \sigma_{pq}(\alpha) = \sum_{1 \leqq \nu < \alpha} \varphi_{pq}(\nu).$$

Zunächst behandeln wir den Fall $p \geqq 2$. Dann gilt:

$$(40) \qquad \left.\begin{array}{ll} \text{(a)} & \sigma_{pqr}(\lambda) = \tilde{\varphi}_{pq}(\lambda) \ (\lambda \text{ Limeszahl}) \\ \text{(b)} & \sigma_{pqr}(\lambda + l) = \tilde{\varphi}_{pq}(\lambda) + \varphi_{pr}(\lambda + l - 1)\ (1 \leqq l < \omega) \end{array}\right\} \ 2 \leqq p < \omega.$$

Denn jedenfalls ist $\sigma_{pqr}(\lambda) \geqq \lim_{1 \leqq \nu < \lambda} \varphi_{pqr}(\nu) = \tilde{\varphi}_{pq}(\lambda)$ (vgl. (31 b)). Andererseits gilt aber auch für $\lambda > \omega$ (für $\lambda = \omega$ ist nichts zu beweisen) $\sigma_{pqr}(\lambda) = \lim_{\omega \leqq \tau < \lambda} \sum_{1 \leqq \nu < \tau} \varphi_{pqr}(\nu)$, und man hat wegen $\tau \geqq \omega$:

$$\sum_{1 \leqq \nu < \tau} \varphi_{pqr}(\nu) \leqq \sum_{1 \leqq \nu < \tau} \left[{}^{\nu^{r}}_{p-1}, \nu^{q} \right] = \sum_{1 \leqq \nu < \tau} \left[\nu^{r}, \left[{}^{\nu^{r}}_{p-2}, \nu^{q} \right] \right] \leqq$$
$$\leqq \sum_{1 \leqq \nu < \tau} \left[\tau^{r}, \left[{}^{\nu^{r}}_{p-2}, \nu^{q} \right] \right] \leqq \left[\tau^{r}, \left[{}^{\tau^{r}}_{p-2}, \tau^{q} \right] \right] = \varphi_{pqr}(\tau).$$

Somit wird

$$\sigma_{pqr}(\lambda) \leqq \lim_{\omega \leqq \tau < \lambda} \varphi_{pqr}(\tau) = \tilde{\varphi}_{pq}(\lambda),$$

womit (40 a) bewiesen ist. — (40 b) folgt so:

$$\sigma_{pqr}(\lambda+l) = \sigma_{pq}(\lambda) + \left[{}^{\lambda}_{p-2}, \lambda^r, \lambda^q\right] + \cdots + \left[{}^{\lambda+l-1}_{p-2}, (\lambda+l-1)^r, (\lambda+l-1)^q\right]$$

$$= \tilde{\varphi}_{pq}(\lambda) + \left[\lambda^r, \left[{}^{\lambda^r}_{p-2}, \lambda^q\right]\right] + \cdots + \left[(\lambda+l-1)^r, \left[{}^{(\lambda+l-1)^r}_{p-2}, (\lambda+l-1)^q\right]\right],$$

und die vorstehende Summe ist gleich der Summe aus ihrem ersten und letzten Summanden.

Aus (40) und Satz 8 ist zu ersehen, daß für $\sigma_{pqr}(\alpha)$ mit $p \geqq 2$ nur die ε-Zahlen kritische Zahlen sind.

2. Eine besondere Behandlung erfordert der Fall $p = 1$, also die Funktion

$$\sigma_{1q}(\alpha) = \sum_{\nu < \alpha} \nu^q \quad (1 \leqq q < \omega,\ \alpha \geqq 1). \tag{41}$$

Zunächst zeigen wir:

Satz 10. *Die kritischen Zahlen der Normalfunktion* $\sigma_{1q}(\alpha) = \sum_{\nu < \alpha} \nu^q$ *sind — außer* $\alpha = 3$ *für* $\sigma_{11}(\alpha)$ *— die* δ*-Zahlen* $\alpha = \omega^{\omega^\nu}$.

Man hat die Ungleichungen

$$\alpha \leqq \sigma_{1q}(\alpha) \leqq \alpha^{q+1} = \varphi_{1,q+1}(\alpha) \quad (\alpha \geqq 3), \tag{42}$$

aus denen folgt

$$\lambda \leqq \sigma_{1q}(\lambda) \leqq \tilde{\varphi}_{1,q+1}(\lambda), \tag{43}$$

speziell also $\sigma_{1q}(\delta) = \delta$. — Übrigens ergibt sich ebenso leicht:

$$\sigma_{1q}(\omega^\nu) = \tilde{\varphi}_{1,q+1}(\omega^\nu) \quad (\nu \geqq 1); \tag{44}$$

denn für $0 < \eta < \omega^\nu$ ist

$$\sigma_{1q}(\omega^\nu) \geqq \eta^q(-\eta + \omega^\nu) = \eta^q \omega^\nu > \eta^{q+1},$$

also

$$\sigma_{1q}(\omega^\nu) \geqq \lim_{\eta < \omega^\nu} \eta^{q+1} = \tilde{\varphi}_{1,q+1}(\omega^\nu);$$

mit Rücksicht auf (43) schließt man daraus auf (44).

Um zum Beweis von Satz 10 zurückzukehren, bemerken wir, daß wegen $\sigma_{1q}(\alpha) \geqq \sigma_{11}(\alpha) \geqq \alpha (\alpha \geqq 3)$ die Gleichheit von $\sigma_{1q}(\alpha)$ und α auch die Gleichung $\sigma_{11}(\alpha) = \alpha$ für $\alpha \geqq 3$ nach sich zieht; da aber $\sigma_{11}(\nu+1) = \sigma_{11}(\nu) + \nu \geqq \nu 2 > \nu + 1$ für $\nu \geqq 3$ ist, so kann $\sigma_{11}(\alpha) = \alpha$ für $\alpha \geqq 3$ nur stattfinden, wenn α eine Limeszahl ist. Sei daher $\sigma_{11}(\lambda) = \lambda$; dann kommt für $3 \leqq \eta < \lambda$:

$$\lambda = \sigma_{11}(\lambda) \geqq \eta + \eta(-\eta + \lambda) = \eta(-\eta + \lambda) \geqq \eta + (-\eta + \lambda) = \lambda,$$

d. h.

$$\eta(-\eta + \lambda) = \lambda, \quad \eta + \lambda = \lambda, \quad -\eta + \lambda = \lambda,$$

somit $\eta\lambda = \lambda$ für alle η zwischen 0 und λ, d. h. λ ist eine δ-Zahl.

3. Um nun $\sigma_{1q}(\alpha)$ für beliebige transfinite α zu bestimmen, bedienen wir uns der Darstellung (34) für α. Zuvor benötigen wir aber noch eine Reihe von Formeln, die wir jetzt herleiten. Vermöge (2) und (3) erhalten wir

$$\begin{aligned}\sigma_{1q}(\alpha+l) &= \sigma_{1q}(\alpha)+\alpha^q l+\alpha^{q-1}(l-1)+\cdots+\alpha(l-1)+l-1\\ &= \sigma_{1q}(\alpha)+(-\alpha^{q+1}+(\alpha+l-1)^q(\alpha+l))\end{aligned} \tag{45}$$

$$(\alpha \geqq \omega,\ 1 \leqq l < \omega).$$

Durch Limesbildung folgt hieraus:

$$\sigma_{1q}(\alpha+\omega) = \sigma_{1q}(\alpha)+\alpha^q\omega \quad (\alpha \geqq \omega). \tag{46}$$

Mittels transfiniter Induktion leitet man aus (46) die Relationen her:

$$\sigma_{1q}(\alpha+\omega\eta) = \sigma_{1q}(\alpha)+\alpha^q\omega\eta \quad (\omega\eta+\alpha=\alpha \geqq \omega) \tag{47}$$

$$\sigma_{1q}(\alpha+\tilde{\alpha}) = \sigma_{1q}(\alpha)+\alpha^q\tilde{\alpha} \quad (\tilde{\alpha}=\lim\xi \text{ für } \xi+\alpha=\alpha \geqq \omega). \tag{48}$$

Denn für $\eta = 0$ und $\eta = 1$ ist (47) richtig; sei daher (47) richtig für ein $\omega\eta < \tilde{\alpha}$; dann liefert (46):

$$\begin{aligned}\sigma_{1q}(\alpha+\omega(\eta+1)) = \sigma_{1q}(\alpha+\omega\eta)+(\alpha+\omega\eta)^q\omega &= \sigma_{1q}(\alpha)+\alpha^q\omega\eta+\alpha^q\omega\\ &= \sigma_{1q}(\alpha)+\alpha^q\omega(\eta+1).\end{aligned}$$

Wenn ferner (47) zutrifft für alle $\omega\eta < \omega\lambda \leqq \alpha$, so folgt

$$\sigma_{1q}(\alpha+\omega\lambda) = \lim_{\eta<\lambda}\sigma_{1q}(\alpha+\omega\eta) = \lim_{\eta<\lambda}(\sigma_{1q}(\alpha)+\alpha^q\omega\eta) = \sigma_{1q}(\alpha)+\alpha^q\omega\lambda.$$

Nach dem Prinzip der transfiniten Induktion ist hiermit (47) bewiesen für alle $\omega\eta \leqq \tilde{\alpha}$, also auch (48) (für $\tilde{\alpha}=\omega$ ist (48) ein Spezialfall von (46)).

Aus (48) entnimmt man insbesondere die Beziehung

$$\sigma_{1q}(\omega^\nu(m+1)) = \sigma_{1q}(\omega^\nu m)+\omega^{\nu(q+1)} \quad (1 \leqq m < \omega,\ 1 \leqq \nu),$$

und bekommt aus ihr durch vollständige Induktion

$$\sigma_{1q}(\omega^\nu(m+1)) = \sigma_{1q}(\omega^\nu)+\omega^{\nu(q+1)}m \quad (1 \leqq m \leqq \omega,\ 1 \leqq \nu). \tag{49}$$

Aus (49) findet man durch Limesbildung

$$\sigma_{1q}(\omega^\nu\omega) = \sigma_{1q}(\omega^\nu)+\omega^{\nu(q+1)}\omega,$$

und wegen $\sigma_{1q}(\omega^\nu) \leqq \omega^{\nu(q+1)}$ (vgl. (42)) ergibt sich die — auch unmittelbar aus (44) vermöge Satz 9 folgende — Relation

$$\sigma_{1q}(\omega^{\nu+1}) = \omega^{\nu(q+1)+1} \quad (\nu \geqq 0). \tag{50}$$

Ferner erhalten wir mittels (44) und Satz 9:

$$\sigma_{1q}(\delta^n) = \delta^{(n-1)(q+1)+1} \quad (1 \leqq n < \omega), \tag{51}$$

unter δ eine beliebige δ-Zahl verstanden.

Die Relation (44) hätte man übrigens auch umgekehrt aus (50) gewinnen können; denn für $0 \leqq \nu = n-1 < \omega$ nimmt (50) die Gestalt an:

$$\sigma_{1q}(\omega^n) = \omega^{(n-1)(q+1)+1} \quad (1 \leqq n < \omega),$$

und hieraus ergibt sich durch Limesbildung $\sigma_{1q}(\omega^\omega) = \omega^\omega$, womit (44) für $1 \leqq \nu < \omega$ und (51) für $\delta = \omega$ bzw. $\delta = \omega^\omega$, $n = 1$ bestätigt ist. Ersetzt man in (50) ν durch ξ, so läßt sich (50) für $\xi \geqq \omega$ schreiben:

$$\sigma_{1q}(\omega^{\xi+1}) = \omega^{(\xi+1)(q+1)} \quad (\xi \geqq \omega),$$

und diese Gleichung repräsentiert die Relation (44) für Nichtlimeszahlen $\nu > \omega$ und liefert durch Limesbildung vermöge Satz 7 und 9 oder auch rein definitionsgemäß die Relation (44) für alle $\lambda = \lim\limits_{\xi < \lambda} (\xi+1) > \omega$, z. B. die spezielle Relation (51) mit $\delta^n > \omega^\omega$, wenn $\lambda = \omega^r n > \omega$ gewählt wird.

(51) und (49) liefern wegen $n(q+1) > (n-1)(q+1) + 1 = n(q+1) - q$:

$$\sigma_{1q}(\delta^n(m+1)) = \delta^{n(q+1)} m \quad (1 \leqq n < \omega,\ 1 \leqq m < \omega). \tag{52}$$

Endlich läßt sich noch zeigen, daß gilt:

$$\sigma_{1q}(\delta^n \gamma) = \delta^{n(q+1)} \gamma \quad (1 \leqq n < \omega \leqq \gamma \leqq \delta). \tag{53}$$

Für $\gamma = \omega$ ist (53) ein Spezialfall von (50); für $\gamma = \delta$ resultiert (51), wenn dort n durch $n+1$ ersetzt wird. Um (53) für alle γ zwischen ω und $\delta > \omega$ zu beweisen, verwenden wir transfinite Induktion. Sei also (53) richtig für ein bestimmtes γ mit $\omega \leqq \gamma < \delta$; dann kann man (47) anwenden mit $\alpha = \delta^n \gamma$, $\omega\eta = \delta^n$ und bekommt:

$$\sigma_{1q}(\delta^n(\gamma+1)) = \sigma_{1q}(\delta^n\gamma) + (\delta^n\gamma)^q \delta^n = \delta^{n(q+1)}\gamma + \delta^{n(q+1)} = \delta^{n(q+1)}(\gamma+1).$$

Wenn ferner (53) richtig ist für $\omega \leqq \gamma < \lambda \leqq \delta$, so folgt durch Limesbildung die Richtigkeit für $\gamma = \lambda$. — (52) und (53) lassen sich zusammenfassen zu der einen Gleichung:

$$\sigma_{1q}(\delta^n \gamma) = \delta^{n(q+1)}(-1+\gamma) \quad (2 \leqq \gamma < \delta,\ 1 \leqq n < \omega). \tag{54}$$

Mittels der Formeln (54), (51) und (47) können wir jetzt $\sigma_{1q}(\alpha)$ für jede Limeszahl α der Form (34) angeben:

$$\begin{aligned} \sigma_{1q}(\delta^n + \omega\eta) &= \delta^{nq+n-q} + \cdots \omega\eta \\ \sigma_{1q}(\delta^n\gamma + \omega\eta) &= \delta^{n(q+1)}(-1+\gamma) + \delta^{nq}\gamma\,\omega\eta \quad (2 \leqq \gamma < \delta) \\ &\qquad (1 \leqq n < \omega,\ \omega\eta < \delta\ ). \end{aligned} \tag{55}$$

Schließlich lassen sich vermöge (3) diese beiden Formeln in eine schreiben:

$$\begin{aligned} \sigma_{1q}(\lambda) &= \delta^{n(q+1)-q} + (-\delta^{n(q+1)} + \lambda^{q+1}) \\ (\delta^n &\leqq \lambda < \delta^{n+1},\ \lambda \text{ Limeszahl},\ 1 \leqq n < \omega). \end{aligned} \tag{56}$$

Mit Rücksicht auf Satz 9 und Definition 3 können wir daher sagen:

Satz 11. *Für eine Limeszahl λ ist genau dann*

$$\sigma_{1q}(\lambda) = \tilde{\varphi}_{1,q+1}(\lambda),$$

wenn entweder λ eine Unstetigkeitsstelle der Funktion $\varphi_{1,q+1}(\alpha) = \alpha^{q+1}$, also $\lambda = \delta^n$ und $\sigma_{1q}(\delta^n) = \delta^{(n-1)(q+1)+1}$ ist, oder wenn λ nicht der

Umgebung einer Unstetigkeitsstelle von $\varphi_{1,q+1}(\alpha)$ angehört; im letzteren Falle gilt

$$\sigma_{1q}(\lambda) = \lambda^{q+1} = \varphi_{1,q+1}(\lambda).$$

4. Zum Schluß bleibt noch $\sigma_{1q}(\alpha)$ für Nichtlimeszahlen $\alpha > \omega$ zu bestimmen. Aus (45) erhalten wir vermöge (56)

$$\begin{aligned}\sigma_{1q}(\lambda + l) &= \delta^{n(q+1)-q} + (-\delta^{n(q+1)} + \lambda^{q+1}) + (-\lambda^{q+1} + (\lambda + l - 1)^q(\lambda + l)) \\ &= \delta^{n(q+1)-q} + (-\delta^{n(q+1)} + (\lambda + l - 1)^q(\lambda + l));\end{aligned}$$

ersetzen wir $\lambda + l$ durch $\alpha + 1$, so kommt

$$\begin{aligned}\sigma_{1q}(\alpha + 1) &= \delta^{n(q+1)-q} + (-\delta^{n(q+1)} + \alpha^q(\alpha + 1)) \\ &(\delta^n \leqq \alpha < \delta^{n+1},\ 1 \leqq n < \omega).\end{aligned} \tag{57}$$

Endlich lassen sich (56) und (57) vereinigen zu

$$\sigma_{1q}(\alpha) = \delta^{n(q+1)-q} + (-\delta^{n(q+1)} + (\alpha - \iota_\alpha)^q\alpha) \quad (\delta^n \leqq \alpha < \delta^{n+1},\ 1 \leqq n < \omega).$$

Aus (57) folgt wegen $\delta^{n(q+1)-q} + \alpha^{q+1} = \alpha^{q+1}$ und wegen $\alpha^q(\alpha + 1) = \alpha^{q+1} + \alpha^q < (\alpha + 1)^{q+1} = \alpha^{q+1} + \alpha^q + \alpha^{q-1} + \cdots + 1$, daß für $\alpha \geqq \omega$ stets

$$\sigma_{1q}(\alpha + 1) < (\alpha + 1)^{q+1} = \varphi_{1,q+1}(\alpha + 1) \quad (\alpha \geqq 0) \tag{58}$$

ist, was für endliche α ebenfalls zutrifft. Demnach wird die „Majorante" $\varphi_{1,q+1}(\alpha) = \alpha^{q+1}$ in der Ungleichung (42) von $\sigma_{1q}(\alpha)$ nur dann erreicht, wenn α eine Limeszahl außerhalb der Umgebungen der Unstetigkeitsstellen von $\varphi_{1,q+1}(\alpha)$ ist.

§ 4.

Die Funktionen $\pi_{pqr}(\alpha)$.

1. Diese Funktionen erklären wir als die transfiniten Produkte (d. h. als Normalfunktionen)

$$\pi_{pqr}(\alpha) = \prod_{1 \leqq \nu < \alpha} \varphi_{pqr}(\nu) \quad (1 \leqq p < \omega,\ 1 \leqq q < \omega,\ 1 \leqq r < \omega,\ \alpha \geqq 2), \tag{59}$$

wobei wieder an die Festsetzung (29) erinnert sei. Analog zu (30) schreiben wir auch hier

$$\pi_{pq1}(\alpha) = \pi_{pq}(\alpha) = \prod_{1 \leqq \nu < \alpha} \varphi_{pq}(\nu). \tag{60}$$

Nehmen wir zunächst $p \geqq 3$ an, so kommt für $\alpha \geqq \omega$ vermöge (19):

$$\pi_{pqr}(\alpha) = 2^{\sigma_{p-1,\,q^r(\alpha)}},$$

also vermöge (40), (19) und Satz 9:

$$\left.\begin{aligned} &\text{(a)} \quad \pi_{pqr}(\lambda) = \varphi_{pq}(\lambda)\ (\lambda \text{ Limeszahl}) \\ &\text{(b)} \quad \pi_{pqr}(\lambda + l) = \varphi_{pq}(\lambda)\varphi_{pqr}(\lambda + l - 1)\ (1 \leqq l < \omega) \end{aligned}\right\} 3 \leqq p < \omega. \tag{61}$$

Die Fälle $p = 1$ und $p = 2$ müssen für sich betrachtet werden. Allgemein gilt aber der

Satz 12. *Die einzigen kritischen Zahlen einer Normalfunktion* $\pi_{pqr}(\alpha)$ *sind die* ε*-Zahlen.*

Für $p \geqq 3$ ergibt sich diese Behauptung aus (61), und wegen $\pi_{p'qr}(\alpha) \geqq \pi_{pqr}(\alpha) \geqq \alpha$ für $p' \geqq p$, $\alpha \geqq 4$ muß dann auch $\pi_{1q}(\varepsilon) = \pi_{2qr}(\varepsilon) = \varepsilon$ sein. Zum vollständigen Beweis des Satzes genügt es wegen $\pi_{2qr}(\alpha) \geqq \pi_{11}(\alpha)$, wenn gezeigt wird, daß $\pi_{11}(\alpha) = \alpha$ nur für $\alpha = 2^\alpha$ möglich ist (endliche kritische Zahlen besitzt kein $\pi_{pqr}(\alpha)$). Da aber

$$\pi_{11}(\alpha + 1) = \pi_{11}(\alpha)\,\alpha \geqq \alpha^3 > \alpha + 1 \quad \text{für} \quad \alpha \geqq 4$$

ist, so kann $\pi_{11}(\alpha)$ nur kritische Limeszahlen besitzen. Sei daher $\pi_{11}(\lambda) = \lambda$. Dann folgt für $4 \leqq \eta < \lambda$ wegen $\pi_{11}(\lambda) = \prod_{1 \leqq \nu < \lambda} \nu$:

$$\lambda = \pi_{11}(\lambda) \geqq \eta \cdot \eta^{-\eta+\lambda} = \eta^{-\eta+\lambda} = \eta + \eta^{-\eta+\lambda} \geqq \eta + (-\eta + \lambda) = \lambda,$$

d. h. $\eta + \lambda = \lambda$, $-\eta + \lambda = \lambda$, somit $\lambda = \eta^\lambda = 2^\lambda$.

2. Wir beschäftigen uns jetzt mit der Funktion

$$\pi_{1q}(\alpha) = \prod_{1 \leqq \nu < \alpha} \nu^q \quad (1 \leqq q < \omega,\ \alpha \geqq 2). \tag{62}$$

Es bestehen die Ungleichungen

$$\alpha \leqq \pi_{1q}(\alpha) \leqq \alpha^{q\alpha} = \varphi_{21q}(\alpha) \quad (\alpha \geqq 4), \tag{63}$$

welche die anderen nach sich ziehen:

$$\lambda \leqq \pi_{1q}(\lambda) \leqq \tilde{\varphi}_{21}(\lambda). \tag{64}$$

Ferner gilt

$$\pi_{1q}(\omega^\nu) = \tilde{\varphi}_{21}(\omega^\nu) \quad (\nu \geqq 1). \tag{65}$$

Denn es ist für $0 < \eta < \omega^\nu$:

$$\pi_{1q}(\omega^\nu) \geqq \eta^{q(-\eta+\omega^\nu)} = \eta^{\omega^\nu} > \eta^\eta, \text{ also } \pi_{1q}(\omega^\nu) \geqq \lim_{\eta < \omega^\nu} \eta^\eta = \tilde{\varphi}_{21}(\omega^\nu),$$

was zusammen mit (64) in der Tat (65) liefert.

Nehmen wir $\alpha \geqq \omega$, $1 \leqq l < \omega$ an, so finden wir mittels (2) und (3) durch vollständige Induktion

$$\begin{aligned} \pi_{1q}(\alpha + l) &= \pi_{1q}(\alpha)\,\alpha^q(\alpha+1)^q \ldots (\alpha + l - 1)^q \\ &= \pi_{1q}(\alpha)\,(\alpha^{lq} + \alpha^{lq-1}(l-1) + \cdots + \alpha^{(l-1)q}(l-1) + \\ &\quad + \alpha^{(l-1)q-1}(l-2) + \cdots + \alpha^{(l-2)q}(l-2) + \cdots + \alpha^{2q-1} + \cdots + \alpha^q) \\ &\qquad (1 \leqq l < \omega \leqq \alpha), \end{aligned} \tag{66}$$

und hieraus durch Limesbildung

$$\pi_{1q}(\alpha + \omega) = \pi_{1q}(\alpha)\,\alpha^\omega \quad (\alpha \geqq \omega), \tag{67}$$

woraus man mittels transfiniter Induktion schließt, daß $\pi_{1q}(\alpha)$ für

Limesargumente $\alpha = \lambda$ von q unabhängig wird — was für $\lambda = \omega^\nu$ bereits aus (65) hervorgeht —, d. h. daß

$$\pi_{1q}(\lambda) = \pi_{11}(\lambda) \quad \text{für } 1 \leqq q < \omega \tag{68}$$

gilt; denn für $\lambda = \omega$ ist (68) richtig, desgleichen für $\lambda + \omega$ vermöge (67), wenn für λ, und somit für alle λ wegen der Stetigkeit von $\pi_{1q}(\alpha)$. — Durch Induktion kann man ferner von (67) zu den Relationen fortschreiten:

$$\pi_{11}(\alpha + \omega\eta) = \pi_{11}(\alpha)\,\alpha^{\omega\eta} \quad (\omega\eta + \alpha = \alpha \geqq \omega), \tag{69}$$

$$\pi_{11}(\alpha + \tilde{\alpha}) = \pi_{11}(\alpha)\,\tilde{\alpha}^{\tilde{\alpha}} \quad (\tilde{\alpha} = \lim \xi \text{ für } \xi + \alpha = \alpha \geqq \omega). \tag{70}$$

Für $\eta = 0$ und $\eta = 1$ ist (69) richtig; aus der Richtigkeit für ein bestimmtes $\omega\eta < \tilde{\alpha}$ ergibt sich vermöge (67)

$$\pi_{11}(\alpha + \omega(\eta+1)) = \pi_{11}(\alpha + \omega\eta)(\alpha + \omega\eta)^\omega = \pi_{11}(\alpha)\,\alpha^{\omega\eta}\,\alpha^\omega = \pi_{11}(\alpha)\,\alpha^{\omega(\eta+1)};$$

wenn ferner (69) zutrifft für alle $\omega\eta < \omega\lambda \leqq \tilde{\alpha}$, so ergibt sich durch Limesbildung die Richtigkeit für $\eta = \lambda$; damit ist (69) bestätigt für alle $\omega\eta \leqq \tilde{\alpha}$, also auch (70) (für $\tilde{\alpha} = \omega$ ist (70) ein Unterfall von (67)).

(70) liefert für $\alpha = \omega^\nu m$:

$$\pi_{11}(\omega^\nu(m+1)) = \pi_{11}(\omega^\nu m)\,\omega^{\nu\omega^\nu} \quad (\nu \geqq 1,\ 1 \leqq m < \omega),$$

was durch vollständige Induktion zu der Gleichung führt:

$$\pi_{11}(\omega^\nu m) = \pi_{11}(\omega^\nu)\,\omega^{\nu\omega^\nu(m-1)} \quad (\nu \geqq 1,\ 1 \leqq m < \omega). \tag{71}$$

Die Beziehung (65) läßt sich nun vermöge Satz 9 explizit so schreiben:

$$\begin{aligned} \pi_{11}(\omega^\nu) &= (\omega^\nu)^{\omega^\nu} \quad (1 < \nu < \omega^\nu) \\ \pi_{11}(\varepsilon) &= \varepsilon, \end{aligned} \tag{72}$$

welche Formeln man übrigens auch wie folgt gewinnen kann: Aus (71) erhält man durch Limesbildung wegen $\pi_{11}(\lambda) \leqq \lambda^\lambda$ (vgl. (63)) zunächst

$$\pi_{11}(\omega^{\nu+1}) = \omega^{\nu\omega^{\nu+1}} = (\omega^{\nu+1})^{\omega^{\nu+1}} \quad (\nu \geqq 1). \tag{73}$$

Mit Rücksicht auf Satz 6 oder 9 bekommt man aber aus (73) durch Limesbildung für $\lim(\nu+1) = \lambda < \omega^\lambda : \pi_{11}(\omega^\lambda) = (\omega^\lambda)^{\omega^\lambda}$, und für $\lim(\nu+1) = \varepsilon = \omega^\varepsilon : \pi_{11}(\varepsilon) = \varepsilon$. Das kann man mit (73) und $\pi_{11}(\omega) = \omega$ in der Tat zu (72) zusammenfassen.

Aufgrund von (72) nimmt (71) die Gestalt an

$$\begin{aligned} &\text{(a)} \quad \pi_{11}(\omega^\nu m) = \omega^{\nu\omega^\nu m} = (\omega^\nu m)^{\omega^\nu m} \quad (1 < \nu < \omega^\nu,\ 1 \leqq m < \omega) \\ &\text{(b)} \quad \pi_{11}(\varepsilon m) = \varepsilon^{1+\varepsilon(m-1)} \quad (\varepsilon = 2^\varepsilon,\ 1 \leqq m < \omega). \end{aligned} \tag{74}$$

Jetzt können wir $\pi_{11}(\lambda)$ für alle Limeszahlen

$$\lambda = \omega^\nu m + \omega\eta \quad (\nu \geqq 1,\ 1 \leqq m < \omega,\ \omega\eta < \omega^\nu) \tag{75}$$

angeben mittels (74) und (69). Es kommt für $1 < \nu < \omega^\nu$:

$$\pi_{11}(\lambda) = \pi_{11}(\omega^\nu m + \omega\eta) = (\omega^\nu m)^{\omega^\nu m}(\omega^\nu m)^{\omega\eta} = (\omega^\nu m)^{\omega^\nu m+\omega\eta}$$
$$= (\omega^\nu m + \omega\eta)^{\omega^\nu m+\omega\eta} = \lambda^\lambda;$$

für $\omega^\nu = \varepsilon = 2^\varepsilon$ erhalten wir:

$$\pi_{11}(\lambda) = \pi_{11}(\varepsilon m + \omega\eta) = \varepsilon^{1+\varepsilon(m-1)}\varepsilon^{\omega\eta} = \varepsilon^{1+\varepsilon(m-1)+\omega\eta}$$
$$= (\varepsilon m + \omega\eta)^{1+\varepsilon(m-1)+\omega\eta} = \lambda^{1+(-\varepsilon+\lambda)}.$$

Offenbar ist aber die letzte Formel auch im Falle $1 < \nu < \omega^\nu$ richtig, unter ε die durch $\varepsilon \leqq \lambda < \left[\begin{smallmatrix}\varepsilon\\ \omega\end{smallmatrix}\right]$ eindeutig bestimmte ε-Zahl verstanden; denn wenn $\lambda \geqq \varepsilon\omega$, so ist in (75) für $\varepsilon = \omega^\varepsilon$: $\nu \geqq \varepsilon + 1$ und für $\varepsilon = \omega$: $\omega^\nu \geqq \omega^2$, d. h. beidemale ist $-\varepsilon + \lambda = \lambda$. — Im ganzen erhalten wir so die Formel

(76) $$\pi_{11}(\lambda) = \lambda^{1+(-\varepsilon+\lambda)}, \text{ wo } 2^\varepsilon = \varepsilon \leqq \lambda < \left[\begin{smallmatrix}\varepsilon\\ \omega\end{smallmatrix}\right].$$

Dieses Ergebnis enthält den

Satz 12. *Für Limeszahlen λ ist genau dann*

$$\pi_{11}(\lambda) = \tilde{\varphi}_{21}(\lambda),$$

wenn λ entweder Unstetigkeitsstelle von $\varphi_{21}(\alpha) = \alpha^\alpha$, also $\lambda = \varepsilon$ und $\pi_{11}(\varepsilon) = \varepsilon$ ist, oder wenn λ nicht der Umgebung einer solchen Unstetigkeitsstelle angehört; im zweiten Falle ist

$$\pi_{11}(\lambda) = \lambda^\lambda = \varphi_{21}(\lambda).$$

3. Nach (63) ist $\alpha^{q\alpha} = \varphi_{21q}(\alpha)$ eine Majorante von $\pi_{1q}(\alpha)$, die nach vorstehendem Satze von $\pi_{1q}(\alpha)$ für Limesargumente $\alpha = \lambda$ im allgemeinen erreicht wird. Wir wollen zusehen, ob dies auch für sonstige α möglich ist. Sei daher $\alpha = \lambda + l$ $(1 \leqq l < \omega)$; nach (66) und (5) wird

$$\pi_{1q}(\lambda + l) = \pi_{1q}(\lambda)(\lambda^{lq} + \lambda^{lq-1}(l-1) + \cdots + \lambda^{(l-1)q}(l-1) +$$
$$+ \lambda^{(l-1)q-1}(l-2) + \cdots + \lambda^q),$$
$$\varphi_{21q}(\lambda + l) = (\lambda + l)^{\lambda+ql} = \lambda^\lambda(\lambda^{ql} + \lambda^{ql-1}l + \cdots + l),$$

und da $\pi_{1q}(\lambda) \leqq \lambda^\lambda$, der zweite Faktor auf der rechten Seite bei der ersten der vorstehenden Gleichungen aber kleiner ist als bei der zweiten, so resultiert die auch für endliche α richtige Beziehung

$$\pi_{1q}(\alpha + 1) < (\alpha + 1)^{q(\alpha+1)} = \varphi_{21q}(\alpha + 1) \quad (\alpha \geqq 1).$$

4. Auf ähnliche Weise wie in den beiden vorangehenden Ziffern verfahren wir nun bei der Bestimmung der Funktionswerte von

(77) $$\pi_{2qr}(\alpha) = \prod_{1 \leqq \nu < \alpha} \nu^{r\nu^q} \quad (\alpha \geqq 2,\ 1 \leqq q < \omega,\ 1 \leqq r < \omega).$$

Wir haben die Ungleichungen

$$\alpha \leqq \pi_{2q^r}(\alpha) \leqq \alpha^{r\alpha^{q+1}} = \varphi_{2,q+1,r}(\alpha) \quad (\alpha \geqq 2), \tag{78}$$

aus denen folgt

$$\lambda \leqq \pi_{2q^r}(\lambda) \leqq \tilde{\varphi}_{2,q+1}(\lambda). \tag{79}$$

Endlich haben wir wieder die Beziehung

$$\pi_{2q^r}(\omega^\nu) = \tilde{\varphi}_{2,q+1}(\omega^\nu) \quad (\nu \geqq 1). \tag{80}$$

Denn es ist für $0 < \eta < \omega^\nu$:

$$\pi_{2q^r}(\omega^\nu) \geqq (\eta^{r\eta^q})^{-\eta+\omega^\nu} = \eta^{\eta^q\omega^\nu} > \eta^{\eta^{q+1}} = \varphi_{2,q+1}(\eta)$$

also

$$\pi_{2q^r}(\omega^\nu) \geqq \lim_{\eta < \omega^\nu} \varphi_{2,q+1}(\eta) = \tilde{\varphi}_{2,q+1}(\omega^\nu);$$

daraus und aus (79) geht (80) hervor.

Wenn $1 \leqq l < \omega \leqq \alpha$, so kommt nach (6) und (7):

$$\begin{aligned}\pi_{2q^r}(\alpha+l) &= \pi_{2q^r}(\alpha)\,\alpha^{r\alpha^q}(\alpha+1)^{r(\alpha+1)^q}\dots(\alpha+l-1)^{r(\alpha+l-1)^q}\\ &= \pi_{2q^r}(\alpha)\,\alpha^{r\alpha^q}(\alpha^{r(\alpha+1)^q}+\dots)\dots(\alpha^{r(\alpha+l-2)^q}+\dots)(\alpha+l-1)^{r(\alpha+l-1)^q}\\ &= \pi_{2q^r}(\alpha)\,(\alpha^{r\sum\limits_{i<l}(\alpha+i)^q}+\dots)\end{aligned}$$

oder

$$\pi_{2q^r}(\alpha+l) = \pi_{2q^r}(\alpha)\,(\alpha^{r(-\sigma_{1q}(\alpha)+\sigma_{1q}(\alpha+l))}+\vartheta(l-1)) \quad (1 \leqq l < \omega \leqq \alpha). \tag{81}$$

Ist α eine Limeszahl λ, so erhält man anstelle von (81) die einfachere Formel (mit Verwendung von (5)):

$$\pi_{2q^r}(\lambda+l) = \pi_{2q^r}(\lambda)\,\lambda^{r\sum\limits_{i<l}(\lambda+i)^q - r(l-1)}(\lambda+l-1)^{r(l-1)},$$

oder, da hierin der Exponent von λ eine Limeszahl ist:

$$\begin{gathered}\pi_{2q^r}(\lambda+l) = \pi_{2q^r}(\lambda)(\lambda+l-1)^{r(-\sigma_{1q}(\lambda)+\sigma_{1q}(\lambda+l))}\\ (1 \leqq l < \omega,\ \lambda \text{ Limeszahl});\end{gathered} \tag{81'}$$

diese Formel wird nachher benötigt werden.

(81) liefert uns bei Limesbildung

$$\pi_{2q^r}(\alpha+\omega) = \pi_{2q^r}(\alpha)\,\alpha^{-\sigma_{1q}(\alpha)+\sigma_{1q}(\alpha+\omega)}$$

oder vermöge (46)

$$\pi_{2q^r}(\alpha+\omega) = \pi_{2q^r}(\alpha)\,\alpha^{\alpha^q\omega} \quad (\alpha \geqq \omega). \tag{82}$$

Aus (82) schließen wir induktiv, daß für Limeszahlen λ die Funktionswerte $\pi_{2q^r}(\lambda)$ von r unabhängig sind (was wir für $\lambda = \omega^\nu$ aus (80) entnehmen können), daß also

$$\pi_{2q^r}(\lambda) = \pi_{2q}(\lambda) \tag{83}$$

ist (vgl. den Beweis von (68)). Ferner gelangen wir durch transfinite

Induktion von (82) zu den Gleichungen

$$\pi_{2q}(\alpha + \omega\eta) = \pi_{2q}(\alpha)\,\alpha^{\alpha^q\omega\eta} \quad (\omega\eta + \alpha = \alpha \geqq \omega) \tag{84}$$

$$\pi_{2q}(\alpha + \tilde{\alpha}) = \pi_{2q}(\alpha)\,\alpha^{\alpha^q\tilde{\alpha}} \quad (\tilde{\alpha} = \lim \zeta \text{ für } \zeta + \alpha = \alpha \geqq \omega). \tag{85}$$

Wenn nämlich (84) richtig ist für ein $\omega\eta < \tilde{\alpha}$, so folgt vermöge (82):

$$\begin{aligned}\pi_{2q}(\alpha + \omega(\eta+1)) &= \pi_{2q}(\alpha+\omega\eta)\,(\alpha+\omega\eta)^{(\alpha+\omega\eta)^q\omega} = \pi_{2q}(\alpha)\,\alpha^{\alpha^q\omega\eta}\,\alpha^{\alpha^q\omega}\\ &= \pi_{2q}(\alpha)\,\alpha^{\alpha^q\omega(\eta+1)},\end{aligned}$$

und aus der Richtigkeit für alle $\omega\eta < \omega\lambda \leqq \tilde{\alpha}$ folgt durch Limesbildung die Richtigkeit für $\omega\lambda \leqq \tilde{\alpha}$.

(85) liefert für $\alpha = \omega^\nu m$:

$$\pi_{2q}(\omega^\nu(m+1)) = \pi_{2q}(\omega^\nu m)\,\omega^{\nu\omega^{\nu(q+1)}} \quad (\nu \geqq 1,\ 1 \leqq m < \omega),$$

woraus man mittels vollständiger Induktion findet:

$$\pi_{2q}(\omega^\nu m) = \pi_{2q}(\omega^\nu)\,\omega^{\nu\omega^{\nu(q+1)}(m-1)} \quad (\nu \geqq 1,\ 1 \leqq m < \omega). \tag{86}$$

Wegen $\pi_{2q}(\omega^\nu) \leqq \omega^{\nu\omega^{\nu(q+1)}}$ (s. (78)) bekommt man aus (86) durch Limesbildung die — auch aus (80) abzulesende — Formel

$$\pi_{2q}(\omega^{\nu+1}) = \omega^{\nu\omega^{\nu(q+1)+1}} \quad (\nu \geqq 1). \tag{87}$$

Ferner entnimmt man aus (80) (s. Satz 9):

$$\begin{aligned}\pi_{2q}(\delta^n) &= \delta^{\delta^{(n-1)(q+1)+1}} \quad (\delta^n < 2^{\delta^n},\ 1 \leqq n < \omega)\\ \pi_{2q}(\varepsilon) &= \varepsilon = 2^\varepsilon.\end{aligned} \tag{88}$$

Die letzteren Beziehungen, allgemeiner die Beziehung (80) können auch umgekehrt aus (87) gewonnen werden; denn für $1 \leqq \nu = n-1 < \omega$ nimmt (87) die Form an

$$\pi_{2q}(\omega^n) = \omega^{\omega^{(n-1)(q+1)+1}} = \tilde{\varphi}_{2,q+1}(\omega^n),$$

welche durch Limesbildung übergeht in

$$\pi_{2q}(\omega^\omega) = \omega^{\omega^\omega} = \varphi_{2,q+1}(\omega^\omega),$$

womit (80) für $1 \leqq \nu < \omega$ und (88) für $\delta = \omega$, $n > 1$ und $\delta = \omega^\omega$, $n = 1$ bestätigt ist. Für $\nu \geqq \omega$ kann man (87), wenn noch ν durch ζ ersetzt wird, so schreiben:

$$\pi_{2q}(\omega^{\zeta+1}) = \omega^{(\zeta+1)\omega^{(\zeta+1)(q+1)}} = \omega^{(\zeta+1)(q+1)\omega^{(\zeta+1)(q+1)}},$$

und diese Gleichungen repräsentieren (80) für Nichtlimeszahlen $\nu > \omega$ und liefern (durch Limesbildung) aufgrund der Sätze 6, 7, 9 oder auch unmittelbar definitionsgemäß die Relation (80) für alle $\lambda = \lim\limits_{\zeta<\lambda}(\zeta+1) > \omega$, so speziell die Gleichungen (88) mit $2^{\delta^n} > \delta^n > \omega^\omega$ resp. mit $\varepsilon = \omega^\varepsilon$, wenn $2^\lambda > \lambda = \omega^\tau n > \omega$ resp. $\lambda = \omega^\lambda = \varepsilon$ gewählt wird.

5. Setzt man in (86) $\omega^\nu = \varepsilon = 2^\varepsilon$ resp. $\omega^\nu = \delta^n < 2^{\delta^n}$, so kommt für $2 \leqq m < \omega$

$$\pi_{2q}(\varepsilon\, m) = \varepsilon\, \varepsilon^{\varepsilon^{q+1}(m-1)} = \varepsilon^{\varepsilon^{q+1}(m-1)}$$

resp.

$$\pi_{2q}(\delta^n m) = \delta^{\delta^{n(q+1)-q}} \delta^{\delta^{n(q+1)}(m-1)} = \delta^{\delta^{n(q+1)}(m-1)};$$

beide Formeln kann man zusammenfassen in

(89) $$\pi_{2q}(\delta^n m) = \delta^{\delta^{n(q+1)}(m-1)} \quad (1 \leqq n < \omega \leqq \delta^n,\ 2 \leqq m < \omega).$$

Diese Gleichung wird ergänzt durch

(90) $$\pi_{2q}(\delta^n \gamma) = \delta^{\delta^{n(q+1)}\gamma} \quad (1 \leqq n < \omega \leqq \delta^n,\ \omega \leqq \gamma \leqq \delta);$$

für $\gamma = \omega$ folgt (90) aus (87), und wenn 90 richtig ist für ein bestimmtes γ mit $\omega \leqq \gamma < \delta$, so liefert (84):

$$\pi_{2q}(\delta^n(\gamma+1)) = \pi_{2q}(\delta^n \gamma)(\delta^n \gamma)^{(\delta^n\gamma)^q \delta^n} = \delta^{\delta^{n(q+1)}\gamma} \delta^{\delta^{n(q+1)}} = \delta^{\delta^{n(q+1)}(\gamma+1)},$$

und wenn endlich (90) zutrifft für alle γ mit $\omega \leqq \gamma < \lambda \leqq \delta$, so folgt durch Limesbildung die Richtigkeit für $\gamma = \lambda$. — (89) und (90) vereinigen wir zu

(91) $$\pi_{2q}(\delta^n \gamma) = \delta^{\delta^{n(q+1)}(-1+\gamma)} \quad (1 \leqq n < \omega \leqq \delta^n,\ 2 \leqq \gamma \leqq \delta).$$

Mit (91), (88) und (84) sind wir jetzt in der Lage, $\pi_{2q}(\lambda)$ für alle Limeszahlen λ anzugeben, indem wir diese in die Form bringen:

(92) $$\lambda = \delta^n \gamma + \omega\eta \quad (1 \leqq n < \omega \leqq \delta^n,\ 1 \leqq \gamma < \delta,\ \omega\eta < \delta^n).$$

Dabei gelangen wir zu der allgemeinen nur die Beziehungen $\pi_{2q}(\varepsilon) = \varepsilon$ nicht erfassenden Formel

(93) $$\pi_{2q}(\lambda) = \lambda^{\sigma_{1q}(\lambda)} \quad \text{für } \lambda < 2^\lambda.$$

Für $\lambda = \varepsilon + \omega\eta > \varepsilon$ wird nämlich vermöge (84) und (55):

$$\pi_{2q}(\lambda) = \pi_{2q}(\varepsilon + \omega\eta) = \varepsilon\, \varepsilon^{\varepsilon^q \omega\eta} = \varepsilon^{\varepsilon^q \omega\eta} = \varepsilon^{\sigma_{1q}(\lambda)} = \lambda^{\sigma_{1q}(\lambda)}$$

(man setze in der ersten Gleichung (55) $\delta = \varepsilon$, $n = 1$).

Für $\lambda = \delta^n + \omega\eta$, $\delta^n < 2^{\delta^n}$ kommt vermöge (84), (88) und (55):

$$\pi_{2q}(\lambda) = \pi_{2q}(\delta^n + \omega\eta) = \delta^{\delta^{(n-1)(q+1)+1}} \delta^{\delta^{nq}\omega\eta} = \delta^{\sigma_{1q}(\lambda)} = \lambda^{\sigma_{1q}(\lambda)}.$$

Für $\lambda = \delta^n\gamma + \omega\eta$ mit $2 \leqq \gamma < \delta$ endlich resultiert vermöge (84), (91) und der zweiten Gleichung (55):

$$\begin{aligned}\pi_{2q}(\lambda) &= \pi_{2q}(\delta^n\gamma + \omega\eta) = \delta^{\delta^{n(q+1)}(-1+\gamma)(\delta^n\gamma)^{\delta^{nq}\omega\eta}} \\ &= \delta^{\delta^{n(q+1)}(-1+\gamma)+\delta^{nq}\gamma\omega\eta} = \delta^{\sigma_{1q}(\lambda)} = \lambda^{\sigma_{1q}(\lambda)}.\end{aligned}$$

Damit ist (93) bewiesen.

Nun gilt stets die Beziehung

(94) $$-\varepsilon + \sigma_{1q}(\lambda) = \sigma_{1q}(\lambda) \text{ für } \lambda < 2^\lambda \text{ und } \varepsilon < \lambda < \left[\begin{smallmatrix}\varepsilon\\ \omega\end{smallmatrix}\right].$$

Es genügt, dies zu zeigen für $\lambda = \varepsilon + \omega$. Nach (55) ist aber für $\varepsilon > \omega$: $\sigma_{1q}(\varepsilon + \omega) = \varepsilon + \varepsilon^q \omega = \varepsilon^q \omega$, und für $\varepsilon = \omega$: $\sigma_{1q}(\omega 2) = \omega^{q+1} = \omega + \omega^{q+1}$. — Mit Rücksicht auf (94) kann man (93) und $\pi_{2q}(\varepsilon) = \varepsilon$ zu der Formel vereinigen:

$$\pi_{2q}(\lambda) = \lambda^{1+(-\varepsilon+\sigma_{1q}(\lambda))} \quad \left(\lambda \text{ Limeszahl}, \ \varepsilon \leqq \lambda < \left[\begin{matrix}\varepsilon \\ \omega\end{matrix}\right]\right). \tag{95}$$

Wann ist nun $\pi_{2q}(\lambda) = \tilde{\varphi}_{2,q+1}(\lambda)$? Zunächst für $\lambda = \varepsilon$. Für $\lambda < 2^\lambda$ aber ist $\tilde{\varphi}_{2,q+1}(\lambda) = \lambda^{\tilde{\varphi}_{1,q+1}(\lambda)}$; unsere Frage ist daher im Hinblick auf (93) dahin zu beantworten, daß $\sigma_{1q}(\lambda) = \tilde{\varphi}_{1,q+1}(\lambda)$ sein muß. Darüber gibt aber der Satz 11 Auskunft.

Wir haben so das Ergebnis:

Satz 13. *Das transfinite Produkt $\pi_{2q}(\lambda)$ wird für beliebige Limeszahlen durch die Formel (95) gegeben. Es gilt genau dann*

$$\pi_{2q}(\lambda) = \tilde{\varphi}_{2,q+1}(\lambda),$$

wenn λ entweder eine Unstetigkeitsstelle der Funktion $\varphi_{2,q+1}(\alpha) = \alpha^{\alpha^{q+1}}$, also $\lambda = \varepsilon$ resp. $\lambda = \delta^n < 2^{\delta^n}$ $(1 \leqq n < \omega)$ ist und $\pi_{2q}(\lambda)$ durch (88) gegeben wird, oder wenn λ nicht der Umgebung einer solchen Unstetigkeitsstelle angehört; dann ist

$$\pi_{2q}(\lambda) = \varphi_{2,q+1}(\lambda) = \lambda^{\lambda^{q+1}}.$$

6. Den Wert von $\pi_{2qr}(\alpha)$ bestimmen wir für eine Nichtlimeszahl α mit Hilfe von (81′). Dann wird für $\lambda = \varepsilon$:

$$\pi_{2qr}(\varepsilon + l) = \varepsilon(\varepsilon + l - 1)^{r(-\sigma_{1q}(\varepsilon)+\sigma_{1q}(\varepsilon+l))} = (\varepsilon + l - 1)^{r(-\varepsilon+\sigma_{1q}(\varepsilon+l))};$$

für $\lambda < 2^\lambda$ kommt vermöge (93) und (5):

$$\pi_{2qr}(\lambda + l) = (\lambda + l - 1)^{r\sigma_{1q}(\lambda)}(\lambda + l - 1)^{r(-\sigma_{1q}(\lambda)+\sigma_{1q}(\lambda+l))} = (\lambda + l - 1)^{r\sigma_{1q}(\lambda+l)}.$$

Wegen (94) kann man, wenn $\lambda + l = \alpha + 1$ gesetzt wird, beide Resultate zusammenfassen in

$$\pi_{2qr}(\alpha + 1) = \alpha^{r(-\varepsilon+\sigma_{1q}(\alpha+1))} \quad \left(\omega \leqq \varepsilon \leqq \alpha < \left[\begin{matrix}\varepsilon \\ \omega\end{matrix}\right]\right). \tag{96}$$

Endlich lassen sich (95) und (96) vereinigen zu

$$\pi_{2qr}(\alpha) = (\alpha - \iota_\alpha)^{1+r(-\varepsilon+\sigma_{1q}(\alpha))} \quad \left(\omega \leqq \varepsilon \leqq \alpha < \left[\begin{matrix}\varepsilon \\ \omega\end{matrix}\right]\right).$$

Aus (96) bekommt man nun wegen (58) für $\alpha \geqq \omega$:

$$\pi_{2qr}(\alpha + 1) \leqq \alpha^{r\sigma_{1q}(\alpha+1)} < \alpha^{r(\alpha+1)^{q+1}} \leqq (\alpha + 1)^{r(\alpha+1)^{q+1}},$$

also die (auch für endliche α richtige) Ungleichung

$$\pi_{2qr}(\alpha + 1) < (\alpha + 1)^{r(\alpha+1)^{q+1}} = \varphi_{2,q+1,r}(\alpha + 1) \quad (\alpha \geqq 1).$$

Demnach wird die Majorante $\varphi_{2,q+1,r}(\alpha)$ (s. Ungleichung (78)) von $\pi_{2qr}(\alpha)$ nur für die in Satz 13 genannten Limeszahlen λ, die keiner Umgebung einer Unstetigkeitsstelle von $\varphi_{2,q+1}(\alpha)$ angehören, erreicht.

(Eingegangen am 4. Februar 1950.)

Mathematische Zeitschrift, Band 53, Heft 5, S. 450–453 (1951).

Beziehungen zwischen einigen Matrizen der Limitierungstheorie.

Von

W. Meyer-König in Stuttgart.

Die vorliegende Note ergänzt eine in dieser Zeitschrift erschienene Arbeit des Verfassers, welche die Untersuchung der Limitierungsverfahren T_α und S_α zum Ziele hatte (vgl. [2][1])). Diese Verfahren sind aufgebaut auf den Matrizen

$$T_\alpha = (1-\alpha)^{n+1}\binom{\nu}{n}\alpha^{\nu-n}, \qquad S_\alpha = (1-\alpha)^{n+1}\binom{n+\nu}{\nu}\alpha^{\nu}$$

($0<\alpha<1$; $n = 0, 1, \ldots$ Zeilenindex, $\nu = 0, 1, \ldots$ Spaltenindex), deren Beziehung zu der Matrix

$$C_k = \begin{cases} \binom{n-\nu+k-1}{n-\nu}\Big/\binom{n+k}{n} & \text{für } 0 \leqq \nu \leqq n;\ n = 0, 1, \ldots \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

des Cesàroschen Verfahrens der positiven ganzzahligen Ordnung k im folgenden dargestellt werden soll.

Der Sachverhalt läßt sich am prägnantesten bei Einführung der Matrizen

$$T_\alpha^{(k)} = (1-\alpha)^{n+k+1}\binom{\nu+k}{n+k}\alpha^{\nu-n}, \qquad S_\alpha^{(k)} = (1-\alpha)^{n+k+1}\binom{n+k+\nu}{\nu}\alpha^{\nu}$$

($k = 0, 1, \ldots$; $n, \nu = 0, 1, \ldots$) formulieren. Die Matrix $T_\alpha^{(k)}$ entsteht aus T_α durch Streichung der k ersten Zeilen und der k ersten Spalten; speziell ist $T_\alpha^{(0)} = T_\alpha$. Die Matrix $S_\alpha^{(k)}$ entsteht aus S_α durch Streichung der k ersten Zeilen; speziell ist $S_\alpha^{(0)} = S_\alpha$. Es gilt

Satz 1. *Für feste Werte k ($k = 1, 2, \ldots$) und α ($0<\alpha<1$) ist*

$$C_k T_\alpha = T_\alpha^{(k)} C_k, \tag{1}$$

$$C_k S_\alpha = S_\alpha^{(k)} C_k. \tag{2}$$

[1]) Die Schrifttumsnachweise finden sich am Schluß der Note. Zu der in [2] verzeichneten Literatur sei an dieser Stelle die Angabe ergänzend hinzugefügt, daß die Matrizen T_α und S_α und die zugehörigen Limitierungsverfahren unter anderen Bezeichnungen auch in [3] untersucht sind (vgl. dazu das Referat des Verfassers im Zentralblatt für Mathematik **33** (1950), S. 257). Ferner sei bezüglich des T_α-Verfahrens (oder Kreisverfahrens) noch auf [1], Kapitel IX verwiesen. Insbesondere findet sich der auf das E_p-Verfahren bezügliche Teil des Satzes 23 aus [2] auch dort.

Dabei soll z. B. $C_k T_\alpha$ das Produkt der Matrizen C_k und T_α bedeuten. Die Existenz aller vorkommenden Produkte ist wegen der Permanenz der beteiligten Matrizen gesichert. Die Formeln (1) und (2) bieten einen Ersatz für die nicht vorhandene Vertauschbarkeit von C_k einerseits mit T_α und S_α andererseits. Daß tatsächlich $C_k T_\alpha \neq T_\alpha C_k$ und $C_k S_\alpha \neq S_\alpha C_k$ ist, erkennt man z. B., wenn man die in der linken oberen Ecke stehenden Elemente der fraglichen Produktmatrizen miteinander vergleicht.

Ehe wir den Satz 1 beweisen, sei angegeben, was (1) und (2) für die Limitierungstheorie besagen. Die Matrix T_α sei auf die Folge s_n $(n = 0, 1, \ldots)$ anwendbar[2]). Dann ist $T_\alpha|s|$ und damit auch

$$C_k(T_\alpha|s|) = (C_k T_\alpha)|s| = (T_\alpha^{(k)} C_k)|s| = T_\alpha^{(k)}(C_k|s|)$$

vorhanden. Also sind weiter $C_k(T_\alpha s)$ und $T_\alpha^{(k)}(C_k s)$ vorhanden, und gilt insbesondere

$$C_k(T_\alpha s) = T_\alpha^{(k)}(C_k s). \tag{3}$$

Demnach ist, wie man leicht erkennt, das n-te Glied der C_k-Transformierten der T_α-Transformation der Folge s_n gleich dem $(n+k)$-ten Glied der T_α-Transformierten derjenigen Folge, die aus der C_k-Transformation von s_n durch Vorsetzen von k verschwindenden Gliedern entsteht. Dies hat (unter etwas stärkeren Voraussetzungen) schon R. Wais [4] festgestellt und daraus den Schluß gezogen, daß die Verfahren C_k und T_α miteinander verträglich sind. Ist die Matrix S_α auf die Folge s_n anwendbar, so ergibt sich analog zu (3) die Beziehung

$$C_k(S_\alpha s) = S_\alpha^{(k)}(C_k s), \tag{4}$$

welche besagt, daß das n-te Glied der C_k-Transformierten der S_α-Transformation der Folge s_n gleich dem $(n+k)$-ten Glied der S_α-Transformierten der C_k-Transformation von s_n ist. Es folgt, daß die Verfahren C_k und S_α miteinander verträglich sind[3]).

Wir beweisen jetzt den Satz 1. Für $n, \nu \geqq 0$ ist

$$C_k T_\alpha = \binom{n+k}{k}^{-1} \sum_{\mu=0}^{n} \binom{n-\mu+k-1}{k-1} \binom{\nu}{\mu} (1-\alpha)^{\mu+1} \alpha^{\nu-\mu},$$

$$T_\alpha^{(k)} C_k = (1-\alpha)^{n+k+1} \sum_{\mu=\nu}^{\infty} \binom{\mu+k}{n+k} \binom{\mu-\nu+k-1}{k-1} \binom{\mu+k}{k}^{-1} \alpha^{\mu-n}.$$

Wegen

$$\binom{n+k}{k}\binom{\mu+k}{n+k} = \binom{\mu+k}{k}\binom{\mu}{n}$$

ist (1) daher gleichwertig mit der Beziehung

$$\sum_{\mu=0}^{n} \binom{n-\mu+k-1}{k-1} \binom{\nu}{\mu} \frac{\alpha^{n-\mu}}{(1-\alpha)^{n-\mu+k}} = \sum_{\mu=\nu}^{\infty} \binom{\mu-\nu+k-1}{k-1} \binom{\mu}{n} \alpha^{\mu-\nu},$$

[2]) siehe für das Folgende [2], S. 262 und 272, ferner S. 260, Satz 1.

[3]) Mit anderem Beweis wurde dies in [2], S. 283 festgestellt.

die wir wegen

$$\frac{\alpha^{n-\mu}}{(1-\alpha)^{n-\mu+k}} = \sum_{\eta=0}^{\infty} \binom{n-\mu+\eta+k-1}{n-\mu+k-1} \alpha^{n-\mu+\eta} = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{m+k-1}{n-\mu+k-1} \alpha^m$$

(für $0 \leqq \mu \leqq n$) auch in der Form

$$\sum_{\mu=0}^{n} \binom{n-\mu+k-1}{k-1} \binom{\nu}{\mu} \sum_{m=0}^{\infty} \binom{m+k-1}{n-\mu+k-1} \alpha^m = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{m+k-1}{k-1} \binom{m+\nu}{n} \alpha^m$$

schreiben können. Die Behauptung (1) ist also bewiesen, wenn für $m = 0, 1, \ldots$ gezeigt ist, daß

$$\sum_{\mu=0}^{n} \binom{n-\mu+k-1}{k-1} \binom{\nu}{\mu} \binom{m+k-1}{n-\mu+k-1} = \binom{m+k-1}{k-1} \binom{m+\nu}{n},$$

oder, wegen

$$\binom{n-\mu+k-1}{k-1} \binom{m+k-1}{n-\mu+k-1} = \binom{m+k-1}{k-1} \binom{m}{n-\mu},$$

daß

$$\sum_{\mu=0}^{n} \binom{m}{n-\mu} \binom{\nu}{\mu} = \binom{m+\nu}{n}$$

ist. Die letzte Gleichung ist wegen des Additionstheorems der Binomialkoeffizienten aber sicher richtig. — Die Beziehung (2) ergibt sich sehr einfach aus dem folgenden Satz 2, in dem

$$E_p = \frac{1}{2^{pn}} \binom{n}{\nu} (2^p - 1)^{n-\nu}$$

$(n, \nu = 0, 1, \ldots)$ die dem Euler-Knoppschen Limitierungsverfahren der positiven Ordnung p zu Grunde liegende Matrix ist.

Satz 2. *Stehen die festen Werte* α $(0 < \alpha < 1)$ *und* p $(0 < p)$ *zueinander in der Beziehung* $\alpha = 1/2^p$ *und besitzt* k *einen nicht negativen ganzzahligen Wert* [4]*, so ist*

$$E_p T_\alpha^{(k)} = S_\alpha^{(k)}.$$

Die Existenz des Produktes $E_p T_\alpha^{(k)}$ ist dabei gesichert. Es ist

$$E_p T_\alpha^{(k)} = (1-\alpha)^{n+k+1} \alpha^\nu \sum_{\mu=0}^{\infty} \binom{n}{\mu} \binom{\nu+k}{\mu+k}.$$

Wegen des Additionstheorems der Binomialkoeffizienten hat man

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} \binom{n}{\mu} \binom{\nu+k}{\mu+k} = \sum_{\mu=0}^{\nu} \binom{n}{\mu} \binom{\nu+k}{\nu-\mu} = \binom{n+\nu+k}{\nu},$$

womit der Satz 2 schon bewiesen ist. — Unter seiner Verwendung und wegen der bekannten Vertauschbarkeit der Matrizen C_k und E_p erhalten wir, wenn p zu α so bestimmt wird, daß $\alpha = 1/2^p$ ist,

$$C_k S_\alpha = C_k E_p T_\alpha = E_p C_k T_\alpha = E_p T_\alpha^{(k)} C_k = S_\alpha^{(k)} C_k.$$

Damit ist (2) bewiesen.

[4]) Der Fall $k = 0$ wurde schon in [2], S. 277 (Satz 14) behandelt.

Schrifttum.

G. H. Hardy.

[1] Divergent series, Oxford (1949).

W. Meyer-König.

[2] Untersuchungen über einige verwandte Limitierungsverfahren, Math. Zeitschr. **52**, Heft 3 (1949), S. 257—304.

P. Vermes.

[3] Series to series transformations and analytic continuation by matrix methods, Amer. J. Math. **71**, Nr. 3 (1949), S. 541—562.

R. Wais.

[4] Das Taylorsche Summierungsverfahren, Dissertation, Tübingen (1935), 58 S.

(Eingegangen am 28. September 1950.)

Mathematische Zeitschrift, Band 53, Heft 5, S. 454—455 (1951).

Über die Basen endlicher Gruppen.

Von

L. Rédei in Szeged.

Im folgenden sei G eine endliche Gruppe ($\neq 1$). Mit $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$ bezeichnen wir die durch die Elemente $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ erzeugte Gruppe, diese Elemente selbst nennen wir eine Basis dieser Gruppe. Eine Basis $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ von G nennen wir:

1) *primär*, wenn alle α_i von Primzahlpotenzordnung sind.

2) *minimal*, wenn 1) gilt und nach Streichen eines α_i keine Basis von G übrigbleibt.

3) *reduziert*, wenn 1), 2) gelten und bei Ersetzung eines α_i durch eine Potenz α_i^d von kleinerer Ordnung als α_i keine Basis von G entsteht.

Bekanntlich gibt es stets primäre Basen. Aus einer solchen läßt sich nach etwaiger Streichung einiger Basiselemente mindestens eine minimale Basis, und weiter hieraus nach etwaiger Ersetzung einiger Basiselemente durch je eine passende Potenz mindestens eine reduzierte Basis gewinnen.

Es erhebt sich die Frage nach den Gruppen, bei denen sich der letzte Reduktionsschritt ersparen läßt. Genauer gesagt fragen wir nach den Gruppen, deren sämtliche Minimalbasen auch schon reduziert sind. Trivialerweise gehören hierher die Gruppen mit lauter Elementen ($\neq 1$) von Primzahlordnung (z. B. die Ikosaedergruppe, d. h. die alternierende Permutationsgruppe der Ziffern $1, \ldots, 5$). Wir werden zeigen, daß auch *die p-Gruppen die genannte Eigenschaft haben*, was bisher unbemerkt geblieben zu sein scheint [1]).

Wir gewinnen mit gleicher Mühe sogar den folgenden, in zwei Richtungen allgemeineren Satz:

---

[1]) Der einfachste nichttriviale Spezialfall lautet: Ist $G = \{\alpha, \beta\}$ eine nichtzyklische p-Gruppe, so ist $\{\alpha^p, \beta\}$ eine echte Untergruppe von G. Herr A. Speiser teilte mir hierfür vor einigen Jahren freundlich einen Beweis mit, der mir dann nach Verallgemeinerung zum obigen Satz verholfen hat. Ist dabei G nichtabelsch, so ist sogar die Kommutatorgruppe von $\{\alpha^p, \beta\}$ in der von G echt enthalten. Dies und eine entsprechende Verallgemeinerung obigen Satzes konnten wir mit Herrn E. Szép gemeinsam beweisen, unsere Arbeit darüber erscheint in den Monatsheften f. Math.

Satz: *Bezeichne $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ eine Minimalbasis einer endlichen nilpotenten*[2]) *Gruppe G, p_i den Primteiler der Ordnung von α_i $(i = 1, \ldots, k)$ und $\mathfrak{m}$ eine Teilmenge der Indizes $1, \ldots, k$. Man setze $G_{\mathfrak{m}} = \{\beta_1, \ldots, \beta_k\}$, wobei β_i gleich $\alpha_i^{p_i}$ oder α_i ist, je nachdem $i \in \mathfrak{m}$ gilt oder nicht gilt. Dann sind alle 2^k Gruppen $G_{\mathfrak{m}}$ voneinander verschieden.*

Bevor wir zum Beweis übergehen, machen wir einige Bemerkungen. Da offenbar $G_{\mathfrak{m}} < G_{\mathfrak{n}}$ für $\mathfrak{m} > \mathfrak{n}$ gelten muß, kann man über die $G_{\mathfrak{m}}$ Schärferes aussagen. Insbesondere folgt aus unserem Satz, daß der Index von $\{\alpha_1^{p_1}, \ldots, \alpha_k^{p_k}\}$ in G ein Vielfaches von $p_1, \ldots, p_k$ ist.

Für Gruppen G, die nicht nilpotent sind, braucht der Satz nicht zu gelten. Man rechnet z. B. leicht nach, daß die beiden zyklischen Permutationen (1 2 3 4), (1 2 3 5) vierter Ordnung eine nichtreduzierte Minimalbasis der symmetrischen Permutationsgruppe von $1, \ldots, 5$ bilden.

Nunmehr wollen wir den Satz über die nilpotenten G beweisen. Hierzu nehmen wir an, daß der Satz falsch ist, d. h. zwei gleiche Untergruppen $G_{\mathfrak{m}}$, $G_{\mathfrak{n}}$ $(\mathfrak{m} \neq \mathfrak{n})$ existieren. Mit passender Bezeichnung dürfen wir $1 \notin \mathfrak{m}$, $1 \in \mathfrak{n}$ annehmen. Wir bezeichnen mit G' die Kommutatorgruppe von G und verwenden für die Elemente der Faktorgruppe G/G' die Bezeichnung $\bar{\varrho} = \varrho G'$ $(\varrho \in G)$. Aus $G_{\mathfrak{m}} = G_{\mathfrak{n}}$ folgt $\{G_{\mathfrak{m}}, \alpha_2, \ldots, \alpha_k\} = \{G_{\mathfrak{n}}, \alpha_2, \ldots, \alpha_k\}$ d. h.

$$\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\} = \{\alpha_1^{p_1}, \alpha_2, \ldots, \alpha_k\},$$

also

$$\{\bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_k\} = \{\bar{\alpha}_1^{p_1}, \bar{\alpha}_2, \ldots, \bar{\alpha}_k\}.$$

Letzteres ergibt

$$\bar{\alpha}_1 \in \{\bar{\alpha}_1^{p_1}, \bar{\alpha}_2, \ldots, \bar{\alpha}_k\}.$$

Die Gruppe auf der rechten Seite ist abelsch, somit folgt weiter

$$\bar{\alpha}_1^{1+p_1 x} \in \{\bar{\alpha}_2, \ldots, \bar{\alpha}_k\}$$

mit einer ganzen rationalen Zahl x. Der Exponent auf der linken Seite ist zu p_1 prim, weshalb sogar $\bar{\alpha}_1 \in \{\bar{\alpha}_2, \ldots, \bar{\alpha}_k\}$ gilt. Hiernach ist

$$G/G' = \{\bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_k\} = \{\bar{\alpha}_2, \ldots, \bar{\alpha}_k\},$$

also bilden $\alpha_2, \ldots, \alpha_k$ und die Elemente von G' eine Basis von G. Nach Fußnote[2]) c) folgt hieraus $G = \{\alpha_2, \ldots, \alpha_k\}$, obwohl doch $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ eine Minimalbasis von G ist. Der erhaltene Widerspruch beendet den Beweis des Satzes.

---

[2]) Eine endliche nilpotente Gruppe G läßt sich durch jede der folgenden drei Bedingungen charakterisieren: a) G ist das direkte Produkt seiner Sylowgruppen, b) Die aufsteigende Zentralreihe Z_0 $(= 1)$, $Z_1, \ldots$ $(Z_{i+1}/Z_i$ ist das Zentrum von G/Z_i, $i = 0, 1, \ldots)$ endet mit einem $Z_r = G$. c) Aus jeder Basis lassen sich alle Elemente der Kommutatorgruppe streichen. Vgl. Zassenhaus, Lehrbuch der Gruppentheorie I (1937), 1—151, insb. S. 107—108, Sätze 11, 12, 13.

(Eingegangen am 20. Juli 1950.)

Mathematische Zeitschrift, Band 53, Heft 5, S. 456—462 (1951).

Remaksche Zerlegungen für Gruppen mit Paarungen.

Von

Günter Pickert in Tübingen.

Bei einer Gruppe mit Operatoren bewirkt jeder Operator eine homomorphe Abbildung der Gruppe in sich. Eine Abbildung einer Menge in sich läßt sich nun aber auch auffassen als eine in dieser Menge erklärte Relation, nämlich die zwischen einem Element und seinem Bild bestehende. In naheliegender Weise verallgemeinere ich daher den Begriff „Operator" zum Begriff „Paarung"[1]) so, daß jede Paarung in der Gruppe eine Relation hervorruft, welche noch einer der Homomorphiebedingung entsprechenden Bedingung genügen muß. Die so entstehende Struktur „Gruppe mit Paarungen" fällt unter den von mir in einer früheren Arbeit[2]) eingeführten Strukturbegriff, und der dafür definierte Homomorphiebegriff liefert den Paarungshomomorphismus als Verallgemeinerung des Operatorhomomorphismus. Für Gruppen mit Paarungen führe ich ein direktes Produkt ein, welches für Paarungen, die Operatoren sind, in das direkte Produkt von Gruppen mit Operatoren übergeht. Dann zeige ich, wie der übliche Beweis[3]) für Existenz und Eindeutigkeit einer Remakschen Zerlegung bei Gruppen mit Paarungen abgeändert werden muß. Diese Abänderungen werden einerseits durch den neuen Homomorphiebegriff, andererseits durch die neue Definition des direkten Produktes bedingt.

Es sei $\mathfrak{G}$ eine multiplikativ geschriebene Gruppe, $\mathfrak{R}$ eine nichtleere Menge und $r \to \mathfrak{P}_r$ ($r \in \mathfrak{R}$, $0 < \mathfrak{P}_r < \mathfrak{G} \times \mathfrak{G}$) eine Abbildung von $\mathfrak{R}$ in die Menge der nichtleeren Teilmengen von $\mathfrak{G} \times \mathfrak{G}$. Jedes Element r von $\mathfrak{R}$ ruft also in $\mathfrak{G}$ eine Relation $(a, b) \in \mathfrak{P}_r$ hervor. Ich nenne $\mathfrak{R}$ einen *Paarungsbereich* und seine Elemente *Paarungen* von $\mathfrak{G}$, wenn aus $(a, b) \in \mathfrak{P}_r$ und $(a', b') \in \mathfrak{P}_r$ stets $(a a'^{-1}, b b'^{-1}) \in \mathfrak{P}_r$ folgt. $\mathfrak{G}$ wird dann als *Gruppe mit Paarungen* bezeichnet. Insbesondere ist eine Gruppe $\mathfrak{G}$

[1]) Die Anregung dazu sowie den Namen „Paarung" verdanke ich der Arbeit von Wielandt: Zur Abgrenzung der selbstadjungierten Eigenwertaufgaben I, Math. Nachr. 2 (1949), S. 328—339.

[2]) Pickert: Bemerkungen zum Homomorphiebegriff, Diese Zeitschr. 53 (1950), S. 375—386. (Im folgenden als H zitiert.) Auf die Bezeichnungserklärungen am Anfang dieser Arbeit sei auch für die vorliegende Arbeit verwiesen.

[3]) Siehe Zassenhaus: Lehrbuch der Gruppentheorie I (Leipzig 1937) (im folgenden als G zitiert), S. 78—81.

mit dem Operatorenbereich $\mathfrak{R}$ eine solche Gruppe mit Paarungen, wenn — unter $r \cdot a$ das Ergebnis der Anwendung von $r \in \mathfrak{R}$ auf $a \in \mathfrak{G}$ verstanden — als $\mathfrak{P}_r$ die Menge der Paare $(a, r \cdot a)$ genommen wird. Allgemein bezeichne ich eine Paarung r als einen *Operator*, wenn es zu jedem $a \in \mathfrak{G}$ genau ein $b \in \mathfrak{G}$ mit $(a, b) \in \mathfrak{P}_r$ gibt; dieses b kann man dann wieder durch $r \cdot a$ bezeichnen. Eine Paarung r des Paarungsbereiches heiße *s-zulässig* $(s \in \mathfrak{R})$, wenn aus $(a, b) \in \mathfrak{P}_r$, $(a, a') \in \mathfrak{P}_s$, $(b, b') \in \mathfrak{P}_s$ stets $(a', b') \in \mathfrak{P}_r$ folgt. Ist s ein Operator, so bedeutet dies: Aus $(a, b) \in \mathfrak{P}_r$ folgt $(s \cdot a, s \cdot b) \in \mathfrak{P}_r$. Ist auch noch r ein Operator, so kann man dieser Bedingung sogar die einfache Form $r \cdot (s \cdot a) = s \cdot (r \cdot a)$ geben. Für Operatoren r, s bedeutet also s-Zulässigkeit von r dasselbe wie r-Zulässigkeit von s, was für irgendwelche Paarungen natürlich nicht immer richtig ist. Bei $\mathfrak{R}' \leqq \mathfrak{R}$ soll $\mathfrak{R}'$-Zulässigkeit die s-Zulässigkeit für alle $s \in \mathfrak{R}'$ bedeuten. Einen im Paarungsbereich $\mathfrak{R}$ enthaltenen Operatorenbereich $\mathfrak{R}_0$ nenne ich *ausgezeichnet*, falls jede in $\mathfrak{R} - \mathfrak{R}_0$ liegende Paarung $\mathfrak{R}_0$-zulässig ist. Macht man dann in der üblichen Weise die Menge $\mathfrak{G} \times \mathfrak{G}$ durch die Multiplikation $(a, b)(a', b') = (a\,a', b\,b')$ und die äußere Verknüpfung $r \cdot (a, b) = (r \cdot a, r \cdot b)$ (für alle $r \in \mathfrak{R}_0$) zu einer Gruppe $\mathfrak{G}^*$ mit dem Operatorenbereich $\mathfrak{R}_0$, so lassen sich die an $\mathfrak{P}_r$ gestellten Forderungen so ausdrücken: *Für jedes* $r \in \mathfrak{R} - \mathfrak{R}_0$ *ist* $\mathfrak{P}_r$ *eine bez.* $\mathfrak{R}_0$ *zulässige Untergruppe von* $\mathfrak{G}^*$. Hat eine Gruppe $\mathfrak{G}$ mit Paarungsbereich $\mathfrak{R}$ eine Untergruppe $\mathfrak{G}'$, für welche $\mathfrak{P}'_r = \mathfrak{P}_r \cap \mathfrak{G}' \times \mathfrak{G}' > 0$ ist, so wird $\mathfrak{G}'$ wieder als Gruppe mit Paarungsbereich $\mathfrak{R}$ und der Abbildung $r \to \mathfrak{P}'_r$ $(r \in \mathfrak{R})$ aufgefaßt.

Eine Gruppe $\mathfrak{G}$ mit Paarungsbereich $\mathfrak{R}$ läßt sich in folgender Weise als Struktur[4]) $(\mathfrak{G}, \mathfrak{S})$ über der Menge $\mathfrak{G}$ beschreiben: ϱ' und ϱ'' seien umkehrbare Abbildungen von $\mathfrak{R}$ auf die untereinander und zu $\{1, 2, 3\}$ elementefremden Mengen $\mathfrak{J}'$ bzw. $\mathfrak{J}''$; dann wird $\mathfrak{S}$ definiert als Menge der Abbildungen μ von $\{1, 2, 3\} \cup \mathfrak{J}' \cup \mathfrak{J}''$ in $\mathfrak{G}$ mit $(\mu\,1)(\mu\,2) = \mu\,3$ und $(\mu\,\varrho' r, \mu\,\varrho'' r) \in \mathfrak{P}_r$. Der Homomorphiebegriff[5]) für Strukturen $(\mathfrak{G}, \mathfrak{S})$ führt nun zu folgender Definition: Als *Paarungshomomorphismus* einer Gruppe $\mathfrak{G}$ in die Gruppe $\mathfrak{G}'$ mit gemeinsamem Paarungsbereich $\mathfrak{R}$ und den Abbildungen $r \to \mathfrak{P}_r$ bzw. $r \to \mathfrak{P}'_r$ wird ein Homomorphismus σ von $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{G}'$ bezeichnet, für den $\sigma\,\mathfrak{P}_r \leqq \mathfrak{P}'_r$ $(r \in \mathfrak{R})$ gilt, d. h. aus $(a, b) \in \mathfrak{P}_r$ stets $(\sigma a, \sigma b) \in \mathfrak{P}'_r$ folgt. Im Falle $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}'$, $\mathfrak{P}_r = \mathfrak{P}'_r$ bezeichnet man den Paarungshomomorphismus als *Paarungsendomorphismus*. Ein umkehrbarer Paarungshomomorphismus von $\mathfrak{G}$ auf $\mathfrak{G}'$ heißt *Paarungsisomorphismus*, wenn seine Umkehrung wieder ein Paarungshomomorphismus ist. Daß nicht jeder umkehrbare Paarungshomomorphismus ein Paarungsisomorphismus ist, zeigt das Beispiel: $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}' = \{e, a\}$ mit e als neutralem Element, $\mathfrak{R} = \{1\}$, $\mathfrak{P}_1 = \{(e, e), (a, e)\}$, $\mathfrak{P}'_1 = \mathfrak{G} \times \mathfrak{G}$, σ die identische Abbildung von $\mathfrak{G}$. Im Falle $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}'$, $\mathfrak{P}_r = \mathfrak{P}'_r$ wird

[4]) Siehe H. 1. 1.

[5]) Siehe H. 1. 2.

ein Paarungsisomorphismus von $\mathfrak{G}$ auf $\mathfrak{G}'$ als *Paarungsautomorphismus* bezeichnet. Betrachtet man die Untergruppen $\mathfrak{P}_r$ der oben eingeführten Gruppe $\mathfrak{G}^*$, so ruft ein Paarungsendomorphismus σ wegen $\sigma((a,b)(a',b')) = \sigma(a,b)\sigma(a',b')$ und $\sigma\mathfrak{P}_r \leqq \mathfrak{P}_r$ einen Endomorphismus von $\mathfrak{P}_r$ hervor. Ist der Endomorphismus σ von $\mathfrak{G}$ zudem noch normal, d. h. $\sigma(aba^{-1}) = a(\sigma b)a^{-1}$ für alle $a, b \in \mathfrak{G}$, so ist $\sigma\mathfrak{P}_r$ ein Normalteiler von $\mathfrak{P}_r$; denn für (a,b) und (c,d) aus $\mathfrak{P}_r$ gilt $(a,b)(\sigma c, \sigma d)(a,b)^{-1} = (a(\sigma c)a^{-1}, b(\sigma d)b^{-1}) = \sigma(aca^{-1}, bdb^{-1})$. Zwei Endomorphismen σ, τ von $\mathfrak{G}$ heißen bekanntlich *addierbar*, wenn die Abbildung $a \to (\sigma a)(\tau a)$ ebenfalls ein Endomorphismus ist, der dann mit $\sigma + \tau$ bezeichnet wird. Sind nun σ, τ sogar Paarungsendomorphismen, so gilt im Falle der Addierbarkeit dasselbe für $\sigma + \tau$; denn für $(a,b) \in \mathfrak{P}_r$ ist

$$(\sigma+\tau)(a,b) = ((\sigma a)(\tau a), (\sigma b)(\tau b)) = (\sigma a, \sigma b)(\tau a, \tau b) \in \mathfrak{P}_r.$$

Zum Zwecke späterer Verwendung beweise ich einen für Endomorphismen bekannten Tatbestand auch für Paarungsendomorphismen:

Satz 1. *Ist $\mathfrak{G}$ eine Gruppe mit Paarungsbereich $\mathfrak{R}$ und ausgezeichnetem Operatorenbereich $\mathfrak{R}_0$, gilt der Doppelkettensatz für die bez. $\mathfrak{R}_0$ zulässigen Normalteiler von $\mathfrak{G}$ sowie für die von $\mathfrak{P}_r$ $(r \in \mathfrak{R})$, sind σ und τ normale Paarungsendomorphismen von $\mathfrak{G}$ und ruft σ eine Abbildung σ' von $\mathfrak{G}' = \tau\mathfrak{G}$ in sich hervor, so ist σ' ein Paarungsautomorphismus von $\mathfrak{G}'$, falls σ' umkehrbar oder $\sigma\mathfrak{G}' = \mathfrak{G}'$ ist.*

Beweis. Daß die Umkehrbarkeit von σ' dasselbe bedeutet wie $\sigma\mathfrak{G}' = \mathfrak{G}'$, zeigt man in bekannter Weise folgendermaßen. Durch Hinzufügen der sämtlichen inneren Automorphismen von $\mathfrak{G}$ wird aus $\mathfrak{R}_0$ der Operatorenbereich $\mathfrak{R}_1$ gebildet. $\sigma\mathfrak{G}'$ sowie der Kern[6] $\mathfrak{N}$ von σ' sind dann zulässig bez. $\mathfrak{R}_1$. Im Falle $\sigma\mathfrak{G}' = \mathfrak{G}'$ liefert eine bez. $\mathfrak{R}_1$ gebildete Normalreihe[7]) mittels des Isomorphismus $\sigma\mathfrak{G}' \cong \mathfrak{G}'/\mathfrak{N}$ eine ebensolche Normalreihe zwischen $\mathfrak{G}'$ und $\mathfrak{N}$, so daß $\mathfrak{N}$ nur aus dem neutralen Element bestehen kann, σ' also umkehrbar ist. Ist aber σ' umkehrbar, so liefert eine bez. $\mathfrak{R}_1$ gebildete Normalreihe von $\mathfrak{G}'$ eine eben solche von $\sigma\mathfrak{G}'$, so daß $\sigma\mathfrak{G}' = \mathfrak{G}'$ sein muß. Da $\mathfrak{G}' \times \mathfrak{G}' = \tau\mathfrak{G}^*$ zulässiger Normalteiler in $\mathfrak{G}^*$ ist, ergeben sich die zu $\mathfrak{G}'$ gehörigen $\mathfrak{P}_r' = \mathfrak{P}_r \cap \tau\mathfrak{G}^*$ als zulässige Normalteiler in $\mathfrak{P}_r$ und wegen der Normalität von σ sind dann auch die $\sigma\mathfrak{P}_r'$ zulässige Normalteiler in $\mathfrak{P}_r$. Wie eben folgt aus der Umkehrbarkeit von σ' die Gleichung $\sigma'\mathfrak{P}_r' = \mathfrak{P}_r'$. Damit ist σ' als Paarungsautomorphismus erkannt. Falls $\mathfrak{P}_r$ zulässiger Normalteiler in $\mathfrak{G}^*$ ist, kommt man ohne den Doppelkettensatz für die zulässigen Normalteiler von $\mathfrak{P}_r$ aus; denn der Doppelkettensatz überträgt sich von $\mathfrak{G}$ auf $\mathfrak{G}^*$[8]), und $\mathfrak{P}_r'$ sowie $\sigma\mathfrak{P}_r'$ sind dann zulässige Normalteiler von $\mathfrak{G}^*$.

[6]) d. h. die Menge der Elemente von $\mathfrak{G}'$, welche das neutrale Element als Bild haben.

[7]) Siehe G, S. 52.

[8]) Siehe z. B. Pickert: Zur Übertragung der Kettensätze. Math. Ann. 121 (1949), 100–102.

Ist die Gruppe $\mathfrak{G}$ das direkte Produkt ihrer Untergruppen $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ und wird mit $\overline{\mathfrak{G}}$ die aus den Paaren (a_1, a_2) $(a_i \in \mathfrak{G}_i)$ mit der Multiplikation $(a_1, a_2)(b_1, b_2) = (a_1 b_1, a_2, b_2)$ bestehende Gruppe bezeichnet, so ist $(a_1, a_2) \to a_1 a_2$ ein Isomorphismus von $\overline{\mathfrak{G}}$ auf $\mathfrak{G}$. Üblicherweise bezeichnet man a_i dann als die $\mathfrak{G}_i$-*Komponente* von $a_1 a_2$. Ist nun zu $\mathfrak{G}$ ein Paarungsbereich $\Re$ mit $r \to \mathfrak{P}_r$ gegeben und $\mathfrak{P}_r^{(i)} = \mathfrak{P}_r \cap \mathfrak{G}_i \times \mathfrak{G}_i > 0$ $(i = 1, 2)$, so wird $\Re$ durch die Zuordnung $r \to \mathfrak{P}_r^{(i)}$ auch Paarungsbereich von $\mathfrak{G}_i$. Für die Gruppen mit Paarungen $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2$ gibt es nun entsprechend zu $\overline{\mathfrak{G}}$ die direkte Vereinigung [9]) der beiden Strukturen. Man erkennt leicht, daß man diese direkte Vereinigung als die Gruppe $\overline{\mathfrak{G}}$ mit Paarungsbereich $\Re$ auffassen kann, wobei dem Element r von $\Re$ die Menge der Paare $((a_1, a_2), (b_1, b_2))$ mit $(a_i, b_i) \in \mathfrak{P}_r^{(i)}$ $(i = 1, 2)$ zugeordnet wird. Dann ist offenbar $(a_1, a_2) \to a_1 a_2$ ein Paarungshomomorphismus von $\overline{\mathfrak{G}}$ auf $\mathfrak{G}$. Er ist genau dann ein Paarungsisomorphismus, wenn für jedes $r \in \Re$ aus $(a_1 a_2, b_1 b_2) \in \mathfrak{P}_r$ auch $(a_i, b_i) \in \mathfrak{P}_r$ $(i = 1, 2)$ folgt; wegen der Gruppeneigenschaft von $\mathfrak{P}_r$ kann man sich bei dieser Forderung sogar auf $i = 1$ oder $i = 2$ beschränken. Diese Betrachtungen führen zu folgender Ausdehnung des Begriffs „direktes Produkt" auf Gruppen mit Paarungen: Eine Gruppe $\mathfrak{G}$ mit Paarungsbereich $\Re$ heißt $\Re$-*direktes Produkt* $\mathfrak{G}_1 \circ \mathfrak{G}_2$ der Untergruppen $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$, falls $\mathfrak{G}$ direktes Produkt von $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ ist und mit a_1, b_1 als $\mathfrak{G}_1$-Komponenten von a, $b \in \mathfrak{G}$ für jedes $r \in \Re$ aus $(a, b) \in \mathfrak{P}_r$ stets $(a_1, b_1) \in \mathfrak{P}_r$ folgt. Dann hat also $\mathfrak{G}_i$ ebenfalls den Paarungsbereich $\Re$ mit $r \to \mathfrak{P}_r^{(i)} = \mathfrak{P}_r \cap \mathfrak{G}_i \times \mathfrak{G}_i > 0$ und $\mathfrak{G}$ ist paarungsisomorph zur direkten Vereinigung der Gruppen $\mathfrak{G}_i$ mit Paarungen. Weiter ist der Normalteiler $\mathfrak{G}_i$ von $\mathfrak{G}$ zulässig bez. jedes in $\Re$ enthaltenen Operators r; denn aus $a \in \mathfrak{G}_i$ und $(a, r \cdot a) \in \mathfrak{P}_r$ folgt ja, daß $r \cdot a$ mit seiner $\mathfrak{G}_i$-Komponente übereinstimmt und somit ebenfalls in $\mathfrak{G}_i$ liegt. Daher umfaßt der Begriff des $\Re$-direkten Produktes auch den Begriff des direkten Produktes für Gruppen mit Operatoren. Folgt aus $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_1 \circ \mathfrak{G}_2$, daß entweder $\mathfrak{G}_1$ oder $\mathfrak{G}_2$ nur aus dem neutralen Element besteht, so nenne ich $\mathfrak{G}$: $\Re$-*direkt unzerlegbar*. Für $\Re$-direkte Produkte mit mehreren Faktoren gilt natürlich die von den direkten Produkten her bekannte Assoziativität, so daß Klammern fortgelassen werden können. $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_1 \circ \cdots \circ \mathfrak{G}_n$ bedeutet neben der Darstellung von $\mathfrak{G}$ als direktes Produkt der Untergruppen $\mathfrak{G}_i$ offenbar, daß aus $(a, b) \in \mathfrak{P}_r$ für die $\mathfrak{G}_i$-Komponenten a_i, b_i von a bzw. b ebenfalls $(a_i, b_i) \in \mathfrak{P}_r$ gilt. Der Endomorphismus von $\mathfrak{G}$, welcher jedem Element seine $\mathfrak{G}_i$-Komponente zuordnet, ist somit ein Paarungsendomorphismus. Ich bezeichne ihn im folgenden als den zu $\mathfrak{G}_i$ *gehörigen Zerlegungsendomorphismus*. Bei $\Re$-direkt unzerlegbaren $\mathfrak{G}_i$, die nicht nur das neutrale Element enthalten, soll $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_1 \circ \cdots \circ \mathfrak{G}_n$ wie bei Gruppen ohne Paarungen als *Remaksche Zerlegung* bezeichnet werden.

[9]) Siehe H, 2.1.

Ich beweise nun drei Sätze als Vorbereitung auf den Hauptsatz über Remaksche Zerlegungen.

Satz 2. *Wenn ein Paarungshomomorphismus σ der Gruppe $\mathfrak{G}$ mit Paarungsbereich $\mathfrak{R}$ auf die Gruppe $\mathfrak{H}$ den Kern $\mathfrak{G}_2$ hat und einen Paarungsisomorphismus des Normalteilers $\mathfrak{G}_1$ auf $\mathfrak{H}$ hervorruft, so ist $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_1 \circ \mathfrak{G}_2$.*

Beweis. Bekanntlich[10]) ist $\mathfrak{G}$ das direkte Produkt von $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ und $\tau^{-1}\sigma a$ die $\mathfrak{G}_1$-Komponente von $a \in \mathfrak{G}$, wenn τ der von σ hervorgerufene Paarungsisomorphismus von $\mathfrak{G}_1$ auf $\mathfrak{H}$ ist. Aus $(a, b) \in \mathfrak{P}_r$ folgt nun auch $(\tau^{-1}\sigma a, \tau^{-1}\sigma b) \in \mathfrak{P}_r$, d. h. aber, es gilt $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_1 \circ \mathfrak{G}_2$.

Satz 3. *Besteht die Gruppe $\mathfrak{G}$ mit Paarungsbereich $\mathfrak{R}$ nicht nur aus ihrem neutralen Element, ist σ ein Paarungshomomorphismus von $\mathfrak{G}$ auf einen Normalteiler $\overline{\mathfrak{G}}$ der $\mathfrak{R}$-direkt unzerlegbaren Gruppe $\mathfrak{H}$, τ ein Paarungshomomorphismus von $\mathfrak{H}$ in $\mathfrak{J}$ und $\tau \cdot \sigma$ ein Paarungsisomorphismus von $\mathfrak{G}$ auf $\mathfrak{J}$, so ist σ ein Paarungsisomorphismus von $\mathfrak{G}$ auf $\mathfrak{H}$ und τ ein solcher von $\mathfrak{H}$ auf $\mathfrak{J}$.*

Beweis. τ ruft offenbar in $\overline{\mathfrak{G}}$ einen Paarungshomomorphismus τ' auf $\mathfrak{J}$ hervor. Da $\tau' \cdot \sigma$ ein Paarungsisomorphismus ist, sind σ und τ' ebenfalls Paarungsisomorphismen[11]) auf $\overline{\mathfrak{G}}$ bzw. $\mathfrak{J}$. Da $\overline{\mathfrak{G}}$ nicht nur aus dem neutralen Element besteht, folgt nach Satz 2 schließlich noch $\overline{\mathfrak{G}} = \mathfrak{H}$ und damit $\tau' = \tau$.

Satz 4. *Gilt in der $\mathfrak{R}$-direkt unzerlegbaren Gruppe $\mathfrak{G}$ mit Paarungsbereich $\mathfrak{R}$ und ausgezeichnetem Operatorenbereich $\mathfrak{R}_0$ sowie in den $\mathfrak{P}_r (r \in \mathfrak{R})$ der Doppelkettensatz für die bez. $\mathfrak{R}_0$ zulässigen Normalteiler, so folgt daraus, daß, wenn eine Summe addierbarer normaler Paarungsendomorphismen ein Paarungsautomorphismus ist, dasselbe für einen der Summanden gilt.*

Beweis. Dem üblichen Beweisgang folgend[12]) beschränkt man sich auf den Fall zweier normaler Paarungsautomorphismen ω_1, ω_2, deren Summe der identische Automorphismus ist, und weiß dann, daß nicht $\omega_1^n = \omega_2^n = 0$ sein kann und daß sich eine natürliche Zahl n mit $\omega_i^{2n}\mathfrak{G} = \omega_i^n\mathfrak{G}$ $(i = 1, 2)$ bestimmen läßt. Nach Satz 1 ruft also ω_i^n einen Paarungsautomorphismus von $\omega_i^n\mathfrak{G}$ hervor. Wegen der $\mathfrak{R}$-direkten Unzerlegbarkeit von $\mathfrak{G}$ bleiben nach Satz 2 also nur die Möglichkeiten $\omega_i^n = 0$ oder $\omega_i^n\mathfrak{G} = \mathfrak{G}$. Danach ist aber jedenfalls $\omega_1\mathfrak{G} = \mathfrak{G}$ oder $\omega_2\mathfrak{G} = \mathfrak{G}$, und somit nach Satz 1 ω_1 oder ω_2 ein Paarungsautomorphismus.

Nach diesen Vorbereitungen gelingt der Beweis des Hauptsatzes über Remaksche Zerlegungen:

Satz 5. *Gilt in der Gruppe $\mathfrak{G}$ mit Paarungsbereich $\mathfrak{R}$ und ausgezeichnetem Operatorenbereich $\mathfrak{R}_0$ sowie in den $\mathfrak{P}_r$ $(r \in \mathfrak{R})$ der Doppel-*

[10]) Siehe G, S. 78, Satz 3.

[11]) Siehe H, 1. 3.

[12]) Siehe G, S. 79, Satz 6.

kettensatz für die bez. $\mathfrak{R}_0$ zulässigen Normalteiler, so besitzt $\mathfrak{G}$ eine Remaksche *Zerlegung. Sind für eine solche Gruppe $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_1 \circ \cdots \circ \mathfrak{G}_n = \mathfrak{H}_1 \circ \cdots \circ \mathfrak{H}_m$ zwei* Remaksche *Zerlegungen und σ_i, τ_i die dabei zu $\mathfrak{G}_i$ bzw. zu $\mathfrak{H}_i$ gehörigen Zerlegungsendomorphismen, so gilt $n = m$; bei passender Numerierung ist ferner $\sum_{i=1}^{n} \tau_i \cdot \sigma_i$ ein normaler Paarungsautomorphismus von $\mathfrak{G}$, welcher die erste in die zweite Zerlegung überführt, und es gilt $\mathfrak{G} = \mathfrak{H}_1 \circ \cdots \circ \mathfrak{H}_k \circ \mathfrak{G}_{k+1} \circ \cdots \circ \mathfrak{G}_n$ $(k = 1, \ldots)$.*

Beweis. Aus dem Existenzbeweis für eine Remaksche Zerlegung der Gruppe $\mathfrak{G}$ mit Operatorenbereich $\mathfrak{R}_0$ [13]) geht hervor, daß man erst recht eine Remaksche Zerlegung für die Gruppe $\mathfrak{G}$ mit dem Paarungsbereich $\mathfrak{R}$ angeben kann. Um die Eindeutigkeitsaussagen des Satzes nachzuweisen, geht man wie beim üblichen Beweis [13]) vor. Die $\sigma_1 \cdot \tau_i$ rufen addierbare normale Paarungsendomorphismen τ_i' von $\mathfrak{G}_1$ hervor, deren Summe der identische Automorphismus ist. Nach Satz 4 muß also einer der Summanden, etwa τ_1' ein Paarungsautomorphismus von $\mathfrak{G}_1$ sein [14]). Da $\mathfrak{G}_1$ nicht nur aus dem neutralen Element besteht und $\tau_1 \mathfrak{G}_1$ ein Normalteiler der $\mathfrak{R}$-direkt unzerlegbaren Gruppe $\mathfrak{H}_1$ ist, ruft τ_1 daher nach Satz 3 einen Paarungsisomorphismus von $\mathfrak{G}_1$ auf $\mathfrak{H}_1$ hervor. Die $\tau_1 \cdot \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ sind nun addierbar und $\omega_1 = \tau_1 \cdot \sigma_1 + \sum_{i=2}^{n} \sigma_i$ somit ein normaler Paarungsendomorphismus von $\mathfrak{G}$. Ist $\omega_1 a$ gleich dem neutralen Element e von $\mathfrak{G}$, so folgt $e = \sigma_1 \omega_1 a = \sigma_1 \tau_1 \sigma_1 a = \tau_1' \sigma_1 a$, also $\sigma_1 a = e$; daraus ergibt sich weiter

$$\prod_{i=2}^{n} \sigma_i a = \omega_1 a = e, \quad \text{d. h. } \sigma_i a = e \text{ für } i = 2, \ldots, n$$

und somit $a = e$. Damit ist die Umkehrbarkeit von ω_1 gezeigt, und nach Satz 1 ist daher ω_1 ein Paarungsautomorphismus. Er führt $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_1 \circ \cdots \circ \mathfrak{G}_n$ in $\mathfrak{G} = \mathfrak{H}_1 \circ \mathfrak{G}_2 \circ \cdots \circ \mathfrak{G}_n$ über. Für $n = 1$ ist die Behauptung damit bewiesen. Es braucht also nur noch im Falle $n > 1$ der Schluß von $n - 1$ auf n durchgeführt zu werden. Die in den Zerlegungen $\mathfrak{G} = \mathfrak{H}_1 \circ \mathfrak{H}'$ und $\mathfrak{G} = \mathfrak{H}_1 \circ \mathfrak{G}'$ zu $\mathfrak{H}' = \mathfrak{H}_2 \circ \cdots \circ \mathfrak{H}_m$ und $\mathfrak{G}' = \mathfrak{G}_2 \circ \cdots \circ \mathfrak{G}_n$ gehörenden Zerlegungsendomorphismen seien τ bzw. σ. Offenbar ist $\tau = \sum_{i=2}^{n} \tau_i$. Aus $\tau a = b$ folgt $a b^{-1} \in \mathfrak{H}_1$, woraus sich für $a \in \mathfrak{G}'$ wegen $b a^{-1} \in \mathfrak{H}_1$ weiter $a = \sigma b$ ergibt. τ ruft also einen umkehrbaren Paarungshomomorphismus τ' von $\mathfrak{G}'$ in $\mathfrak{H}'$ hervor. Andererseits folgt aus $a = \sigma b$ die Beziehung $b a^{-1} \in \mathfrak{H}_1$ und somit für $b \in \mathfrak{H}'$ weiter $b = \tau a$. Demnach ist τ' sogar eine Abbildung *auf* $\mathfrak{H}'$, und σ

[13]) Siehe G, S. 80.

[14]) Satz 4 ist anwendbar, da jeder zulässige Normalteiler von $\mathfrak{G}_1$ oder von $\mathfrak{P}_r' = \mathfrak{P}_r \cap \mathfrak{G}_1 \times \mathfrak{G}_1$ auch ein solcher von $\mathfrak{G}$ bzw. von $\mathfrak{P}_r$ ist und sich daher der Doppelkettensatz von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{P}_r$ auf $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{P}_r'$ überträgt.

ruft in $\mathfrak{H}'$ die Umkehrabbildung $\tau'^{-1} = \sigma'$ hervor. Damit hat sich τ' als Paarungsisomorphismus von $\mathfrak{G}'$ auf $\mathfrak{H}'$ ergeben, und es gilt

$$\mathfrak{H}' = \mathfrak{H}_2 \circ \cdots \circ \mathfrak{H}_m = \tau\mathfrak{G}_2 \circ \cdots \circ \tau\mathfrak{G}_n .$$

Nach Induktionsvoraussetzung ist somit $n-1 = m-1$, also $n = m$. Mit σ_i' als dem von σ_i in $\mathfrak{G}'$ hervorgerufenen Endomorphismus ist $\tau' \cdot \sigma_i' \cdot \sigma'$ der zu $\tau\mathfrak{G}_i$ gehörige Zerlegungsendomorphismus von $\mathfrak{H}'$, so daß nach passender Umnumerierung der $\mathfrak{G}_2, \ldots, \mathfrak{G}_n, \mathfrak{H}_2, \ldots, \mathfrak{H}_n$ zufolge der Induktionsvoraussetzung $\omega' = \sum_{i=2}^{n} \tau_i \cdot (\tau' \cdot \sigma_i' \cdot \sigma') = \sum_{i=2}^{n} \tau_i \cdot \sigma_i' \cdot \sigma'$ ein normaler Paarungsautomorphismus von $\mathfrak{H}'$ sein muß, welcher $\tau\mathfrak{G}_i$ in $\mathfrak{H}_i$ überführt. $\omega' \cdot \tau' = \sum_{i=2}^{n} \tau_i \cdot \sigma_i'$ ist somit ein normaler Paarungsisomorphismus von $\mathfrak{G}'$ in $\mathfrak{H}'$, der $\mathfrak{G}_i$ in $\mathfrak{H}_i$ überführt. Durch $\omega(a\,a') = a(\omega'\,\tau'\,a')$ $(a \in \mathfrak{H}_1,\ a' \in \mathfrak{G}')$ wird daher ein Paarungsautomorphismus von $\mathfrak{G}$ definiert und der Paarungsautomorphismus $\omega \cdot \omega_1$ von $\mathfrak{G}$ führt $\mathfrak{G}_i$ in $\mathfrak{H}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ über. Wegen $\omega \cdot \omega_1 = \sum_{i=1}^{n} \tau_i \cdot \sigma_i$ ist damit auch der zweite Teil der Eindeutigkeitsaussage bewiesen. Nach Induktionsvoraussetzung ist ferner

$$\mathfrak{H}' = \mathfrak{H}_2 \circ \cdots \circ \mathfrak{H}_k \circ \tau\mathfrak{G}_{k+1} \circ \cdots \circ \tau\mathfrak{G}_n \qquad (k = 2, \ldots, n).$$

φ_i sei dabei der zu $\tau\mathfrak{G}_i$ $(i = k+1, \ldots, n)$ gehörige und ψ_i der zu $\mathfrak{H}_i$ $(i = 2, \ldots, k)$ gehörige Zerlegungsendomorphismus. Bekanntlich ist dann $\mathfrak{G}$ direktes Produkt der Untergruppen $\mathfrak{H}_1, \ldots, \mathfrak{H}_k, \mathfrak{G}_{k+1}, \ldots, \mathfrak{G}_n$. Um es auch als $\mathfrak{R}$-direktes Produkt nachzuweisen, benutze ich die Tatsache, daß $(\sigma\psi_i\tau\,a)(\psi_i\tau\,a)^{-1} \in \mathfrak{H}_1$ und $(\sigma\tau\,a)\,a^{-1} \in \mathfrak{H}_1$ für $a \in \mathfrak{G}$ gilt. Wegen $\tau\,a = (\psi_2\tau\,a) \ldots (\psi_k\tau\,a)(\varphi_{k+1}\tau\,a) \ldots (\varphi_n\tau\,a)$ ist daher

$$(\psi_2\tau\,a) \ldots (\psi_k\tau\,a)(\sigma\varphi_k\tau\,a) \ldots (\sigma\varphi_n\tau\,a)\,a^{-1} \in \mathfrak{H}_1 .$$

Unter Beachtung von $\sigma\varphi_i\tau\,a \in \mathfrak{G}_i$ bedeutet das: $\psi_i\tau\,a$ $(i = 2, \ldots, k)$ und $\sigma\varphi_i\tau\,a$ $(i = k+1, \ldots, n)$ sind die $\mathfrak{H}_i$ bzw. die $\mathfrak{G}_i$-Komponente von a. Da $\psi_i\tau$ und $\sigma\varphi_i\tau$ Paarungsendomorphismen sind, ist damit alles bewiesen.

Die in den Sätzen 1, 4, 5 gemachte Voraussetzung über $\mathfrak{P}_r$ erübrigt sich, sobald $\mathfrak{P}_r$ zulässiger Normalteiler in $\mathfrak{G}^*$ ist: Für Satz 1 wurde dies schon bei seinem Beweis bemerkt, Satz 4 benötigt die Voraussetzung nur für die Zurückführung auf Satz 1, und für Satz 5 ist außerdem nur wesentlich, daß sich die Normalteilereigenschaft von $\mathfrak{P}_r$ auf $\mathfrak{P}_r \cap \mathfrak{G}_1 \times \mathfrak{G}_1$ überträgt und daher Satz 4 auf $\mathfrak{G}_1$ angewandt werden kann.

(Eingegangen am 2. Mai 1950.)

Mathematische Zeitschrift, Band 53, Heft 5, S. 463—487 (1951).

Allgemeine Eigenschaften von Limitierungsverfahren.

Von

Karl Zeller in Tübingen.

§ 1.

Einleitung.

In dieser Arbeit handelt es sich hauptsächlich um Limitierungsverfahren folgende Art: Mit einer Matrix komplexer Zahlen

$$A = \{a_{nk}\} \qquad (k, n = 0, 1, \ldots) \tag{1}$$

transformiert man eine vorgelegte komplexe Zahlenfolge

$$\mathfrak{x} = \{x_k\} \qquad (k = 0, 1, \ldots) \tag{2}$$

in eine Folge

$$y_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}\, x_k \qquad (n = 0, 1, \ldots). \tag{3}$$

Die Folge $\mathfrak{x}$ heißt A-limitierbar zum Werte y, wenn alle Summen y_n einen Sinn haben und $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = y$ existiert [1]).

Von andersartigen Limitierungsverfahren wird nur das C_∞-Verfahren gebraucht, das in § 8 erklärt wird.

Im folgenden wird die Kenntnis der wichtigsten Begriffe und der üblichen Bezeichnungsweisen der Limitierungstheorie vorausgesetzt.

Ein Matrixverfahren der oben geschilderten Form ist bekanntlich genau dann konvergenztreu, wenn es folgenden Bedingungen genügt:

(Zn) $$\overline{\operatorname{fin}}_{n = 0, 1, \ldots} \sum_{k=0}^{\infty} |a_{nk}| < \infty.$$

(Zs) Es existiert $$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} = a.$$

(Sp) Es existiert $$\lim_{n \to \infty} a_{nk} = a_k \qquad (k = 0, 1, \ldots).$$

[1]) Alle in dieser Arbeit vorkommenden Matrizen, Zahlenfolgen und Matrixtransformationen sind von der Form (1), (2) bzw. (3). Es werden i. a. bezeichnet: Komplexe Zahlen mit kleinen lateinischen und griechischen, Matrizen mit großen lateinischen, Zahlenfolgen (Stellen) mit kleinen deutschen, Räume mit großen deutschen Buchstaben.

Es ist genau dann permanent, wenn außer (Zn) gilt:

(Zs_1) Es existiert $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} = 1.$

(Sp_0) Es existiert $\lim_{n\to\infty} a_{nk} = 0 \qquad (k = 0, 1, \ldots).$

Das Ziel der Arbeit ist es, einige Sätze der Limitierungstheorie zu beweisen, die bisher nicht bekannt waren oder ohne Beweis veröffentlicht wurden. Als Beispiele seien angeführt:

1. Es werden notwendige und hinreichende Bedingungen dafür angegeben, daß ein permanentes Matrixverfahren mit allen nicht schwächeren permanenten Matrixverfahren verträglich ist (6. 3).

2. Limitiert eine konvergenztreue Matrix eine beschränkte divergente Folge, so auch eine unbeschränkte Folge (7. 1).

3. Es gibt kein Matrixverfahren, das dasselbe Wirkfeld wie das C_∞-Verfahren hat (8. 3).

Bei den Beweisen werden die Wirkfelder der Matrixverfahren als topologische Räume von einem besonderen Typ, genannt (FK)-Räume, aufgefaßt. In den §§ 2—5 wird die Theorie der (FK)-Räume aufgebaut; die §§ 6—9 bringen Anwendungen auf Limitierungsverfahren.

§ 2.

(FK)-Räume.

Die Einführung der (FK)-Räume ist kurz gehalten und setzt einige Kenntnis der Funktionalanalysis voraus. Zunächst werden die Begriffe „Linearer Raum", „Quasinorm" usw. erklärt.

Definition 2. 1 (Linearer Raum). *Ein linearer Raum* $\mathfrak{E}$ *ist eine additiv geschriebene abelsche Gruppe, in der eine Multiplikation der Gruppenelemente* $\mathfrak{x}$ *mit den komplexen Zahlen a erklärt ist gemäß den Vorschriften*

$$a(b\mathfrak{x}) = (ab)\mathfrak{x};\ a\mathfrak{x} + b\mathfrak{x} = (a+b)\mathfrak{x};\ a\mathfrak{x} + a\mathfrak{y} = a(\mathfrak{x}+\mathfrak{y});$$
$$1\mathfrak{x} = \mathfrak{x}.$$

Dabei bedeutet in der letzten Gleichung $\mathfrak{o}$ das Nullelement der Gruppe.

Eine Operation Φ, die einen linearen Raum $\mathfrak{E}$ in einen ebensolchen $\mathfrak{F}$ abbildet, heißt linear, wenn folgende Gleichungen bestehen:

$$\Phi(\mathfrak{x}+\mathfrak{y}) = \Phi(\mathfrak{x}) + \Phi(\mathfrak{y});\ \Phi(a\mathfrak{x}) = a\,\Phi(\mathfrak{x}) \qquad (a \text{ komplex}).$$

Ein Funktional ist eine Operation, deren Werte komplexe Zahlen sind.

Definition 2. 2 (Quasinorm). *Eine Quasinorm* $p(\mathfrak{x})$ *ist ein in einem linearen Raum* $\mathfrak{E}$ *erklärtes Funktional mit den Eigenschaften:*

(Q_1) $$0 \leqq p(\mathfrak{x}) < \infty$$

(Q_2) $$p(a\,\mathfrak{x}) = |a|\,p(\mathfrak{x}) \qquad (a \text{ komplex})$$

(Q_3) $$p(\mathfrak{x}+\mathfrak{y}) \leqq p(\mathfrak{x}) + p(\mathfrak{y}).$$

Aus (Q_2) folgt $p(\mathfrak{o}) = 0$.

Man betrachtet nun lineare Räume $\mathfrak{E}$ mit der Eigenschaft

(F_1) *Endlich oder abzählbar viele Quasinormen* p_j $(j = 0, 1, \ldots)$[2] *sind in* $\mathfrak{E} = [\mathfrak{E}; p_j]$ *erklärt und bestimmen dort einen Konvergenzbegriff nach* 2. 3.

Definition 2. 3 (Konvergenz). *Eine Folge von Elementen* $\mathfrak{x}^{(r)} \in \mathfrak{E}$ *heißt konzentriert in* $[\mathfrak{E}; p_j]$, *wenn*

$$\lim_{m,\,n \to \infty} p_j(\mathfrak{x}^{(m)} - \mathfrak{x}^{(n)}) = 0 \qquad (j = 0, 1, \ldots)$$

ist. Sie heißt konvergent in $[\mathfrak{E}; p_j]$ *(gegen das Grenzelement* $\mathfrak{x}$*), wenn es ein* $\mathfrak{x} \in \mathfrak{E}$ *gibt, so daß*

$$\lim_{r \to \infty} p_j(\mathfrak{x}^{(r)} - \mathfrak{x}) = 0 \qquad (j = 0, 1 \ldots)$$

gilt.

Mit Hilfe dieser Konvergenz erklärt man in $[\mathfrak{E}; p_j]$ Begriffe wie: Stetigkeit, Berührpunkt, Vollständigkeit, magere Menge[3] (= Menge I. Kategorie), Konvergenz und Summe einer Reihe.

Bei der Verwendung dieser Begriffe muß der zugrunde gelegte Konvergenzbegriff genannt werden. Dies geschieht mit der Bezeichnung $[\mathfrak{E}; p_j]$. Man sagt z. B.: Die Operation Φ ist in $\mathfrak{E}$ erklärt; aber: Φ ist stetig in $[\mathfrak{E}; p_j]$.

Entsprechend wird die Konvergenz bezeichnet:

$$\lim_{r \to \infty} \mathfrak{x}^{(r)} = \mathfrak{x}\ [\mathfrak{E}; p_j]; \quad \mathfrak{x}^{(r)} \to \mathfrak{x}\ [\mathfrak{E}; p_j] \qquad (r \to \infty).$$

Die p_j heißen die (die Konvergenz) definierenden Quasinormen. Es kommt nicht auf die Reihenfolge der p_j an. Diese können auch in anderer Form, z. B. als Doppelfolge, angegeben werden. Verschiedene Systeme von Quasinormen können denselben Konvergenzbegriff definieren. Näheres darüber steht in § 3.

In $[\mathfrak{E}; p_j]$ sind zwei zusätzliche Eigenschaften erwünscht:

(F_2) *Aus* $p_j(\mathfrak{x}) = 0$ $(j = 0, 1, \ldots)$ *folgt* $\mathfrak{x} = \mathfrak{o}$.

(F_3) $[\mathfrak{E}; p_j]$ *ist vollständig.*

Gilt (F_2), so hat eine konvergente Folge in $[\mathfrak{E}; p_j]$ genau ein Grenzelement.

Definition 2. 4 ((F)-Raum). *Ein linearer Raum* $\mathfrak{E} = [\mathfrak{E}; p_j]$ *mit den Eigenschaften* (F_1), (F_2) *und* (F_3) *heißt* (F)*-Raum.*

---

[2] Im Falle endlich vieler Quasinormen ist $(j = 0, 1, \ldots)$ in entsprechendem Sinn zu verstehen.

[3] Bourbaki [3]: Ensemble maigre.

Z. B. ist der Raum der komplexen Zahlen $\mathfrak{K}$ ein (F)-Raum $[\mathfrak{K}; p]$ mit der definierenden Quasinorm $p(\mathfrak{x}) = |\mathfrak{x}|$ (absoluter Betrag der Zahl $\mathfrak{x}$). Der Konvergenzbegriff in $[\mathfrak{K}; p]$ ist gleichbedeutend mit dem gewöhnlichen Konvergenzbegriff.

Setzt man

$$\hat{p}(\mathfrak{x}) = \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j} \frac{p_j(\mathfrak{x})}{1 + p_j(\mathfrak{x})},$$

so ist ein (F)-Raum $[\mathfrak{E}; p_j]$ — wie man leicht sieht — mit der Abstandsdefinition $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = \hat{p}(\mathfrak{x} - \mathfrak{y})$ ein metrischer Raum $[\mathfrak{E}; \hat{p}]$ von dem bei Banach [2] mit (F) bezeichneten Typ. Ein (F)-Raum $[\mathfrak{E}; p_j] = [\mathfrak{E}; p_0, \ldots, p_m]$ mit nur endlich vielen definierenden Quasinormen ist mit der Norm $p^*(\mathfrak{x}) = p_0(\mathfrak{x}) + \cdots + p_m(\mathfrak{x})$ ein Banach-Raum $[\mathfrak{E}; p^*]$.

Dabei ist der Konvergenzbegriff in $[\mathfrak{E}; p_j]$ gleichbedeutend mit dem in $[\mathfrak{E}; \hat{p}]$ bzw. $[\mathfrak{E}; p^*]$. Daher lassen sich die bei Banach [2] aufgeführten Sätze über (F)- und Banach-Räume, die Konvergenzeigenschaften betreffen, hier verwenden. Darunter fallen auch die Sätze über Magerkeit von Mengen; denn die Banach'sche Definition der mageren Menge (die „Kugeln" verwendet), läßt sich durch eine äquivalente ersetzen, die allein auf dem Konvergenzbegriff basiert.

Umgekehrt ist jeder Banach-Raum $[\mathfrak{E}; p]$ mit der Norm p ein (F)-Raum $[\mathfrak{E}; p]$ mit der definierenden Quasinorm p. Hingegen kann nicht jeder (F)-Raum im Banach'schen Sinne als (F)-Raum gemäß 2. 4 aufgefaßt werden. Letztere Räume werden von der „polnischen Schule" B_0-Räume genannt. Näheres hierüber findet man bei J. Dieudonné und L. Schwartz [6].

Definition 2. 5 (Linearer Koordinatenraum). *Ein linearer Koordinatenraum $\mathfrak{E}$ ist eine Menge von Stellen (Zahlenfolgen) $\mathfrak{x} = \{x_0, x_1, \ldots\} = \{x_k\}$ mit komplexen Koordinaten x_k, die mit zwei Stellen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ auch die Stelle $\mathfrak{x} + \mathfrak{y} = \{x_k + y_k\}$ und die Stelle $a\mathfrak{x} = \{a x_k\}$ enthält (a komplex).*

Ein linearer Koordinatenraum ist ein linearer Raum im Sinne von 2. 1. Sein Nullelement ist

$$\mathfrak{o} = \{0, 0, \ldots\}.$$

Ferner wird gesetzt

$$\mathfrak{e}_i = \{0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots\}$$
$$\mathfrak{e}_i^* = \{0, \ldots, 0, 1, 1, \ldots\}, \qquad (i = 0, 1, \ldots)$$

wo die i-te Koordinate als einzige bzw. erste den Wert Eins hat.

Definition 2. 6 ((FK)-Raum). *Ein* (FK)*-Raum $\mathfrak{E} = [\mathfrak{E}; p_j]$ ist ein* (F)*-Raum, der — bei gleicher Bedeutung der Operationen $\mathfrak{x} + \mathfrak{y}$ und $a\mathfrak{x}$ — ein linearer Koordinatenraum ist und folgende Eigenschaft hat:* (FK_1) *Aus $\mathfrak{x}^{(r)} \to \mathfrak{x}$ $[\mathfrak{E}; p_j]$ folgt $x_k^{(r)} \to x_k$ $(r \to \infty, k = 0, 1, \ldots)$ (Koordinatenweise Konvergenz).*

Für einen linearen Koordinatenraum $\mathfrak{E}$ gibt es zwei Möglichkeiten: $\mathfrak{E}$ ist — mit geeigneten definierenden Quasinormen — ein (FK)-Raum, oder $\mathfrak{E}$ ist „kein (FK)-Raum". Im ersteren Falle bestimmen alle Systeme geeigneter definierender Quasinormen in $\mathfrak{E}$ denselben Konvergenzbegriff (4. 5b). Daher kann bei einem (FK)-Raum $\mathfrak{E} = [\mathfrak{E}; p_j]$ die Bezeichnung $[\mathfrak{E}; p_j]$ ohne Gefahr eines Mißverständnisses durch $[\mathfrak{E}]$ (und auch $\mathfrak{E}$) ersetzt werden. Aufgefaßt als (FK)-Raum, erhält also ein linearer Koordinatenraum $\mathfrak{E}$ i. a. die Bezeichnung $[\mathfrak{E}]$. Beispiele: $\mathfrak{F}$ ist eine Untermenge von $\mathfrak{E}$ ($\mathfrak{F} \leq \mathfrak{E}$); $\mathfrak{F}$ ist eine magere Menge in $[\mathfrak{E}]$.

§ 3.

Lineare, stetige Funktionale.

Bei den späteren Anwendungen spielen die linearen, stetigen Funktionale in (FK)-Räumen eine besondere Rolle. Dieser Paragraph bringt Sätze über Funktionale, die nicht nur in (FK)-Räumen gelten, sondern sogar in linearen Räumen $\mathfrak{E} = [\mathfrak{E}; p_j]$ mit der Eigenschaft (F_1). In allen Sätzen des § 3 bedeutet $\mathfrak{E} = [\mathfrak{E}; p_j]$ einen solchen Raum, dessen definierende Quasinormen in der eckigen Klammer näher angegeben werden.

Satz 3. 1 (Fortsetzung linearer Funktionale). *$\mathfrak{F}$ sei ein linearer Unterraum in $[\mathfrak{E}; p]$ und f ein lineares Funktional in $\mathfrak{F}$ mit der Eigenschaft*

$$|f(\mathfrak{x})| \leq p(\mathfrak{x}) \qquad (\mathfrak{x} \in \mathfrak{F}).$$

Dann gibt es ein lineares Funktional g in $\mathfrak{E}$, für das gilt:

$$|g(\mathfrak{x})| \leq p(\mathfrak{x}) \qquad (\mathfrak{x} \in \mathfrak{E})$$
$$g(\mathfrak{x}) = f(\mathfrak{x}) \qquad (\mathfrak{x} \in \mathfrak{F}).$$

Beweis (nach J. Dieudonné): Es gibt ein additives, reelles Funktional h mit den Eigenschaften

$$h(\mathfrak{x}) = \operatorname{Re} f(\mathfrak{x}) \qquad (\mathfrak{x} \in \mathfrak{F}),$$
$$|h(\mathfrak{x})| \leq p(\mathfrak{x}) \qquad (\mathfrak{x} \in \mathfrak{E}),$$
$$h(a\mathfrak{x}) = a \cdot h(\mathfrak{x}) \qquad (a \text{ reell}, \mathfrak{x} \in \mathfrak{E})$$

(siehe z. B. Banach [2], S. 28). Man setzt nun

$$g(\mathfrak{x}) = h(\mathfrak{x}) - i\,h(i\mathfrak{x})$$

und prüft leicht nach, daß g die gewünschten Eigenschaften hat.

Satz 3. 2 (Stetige Quasinormen). *Eine Quasinorm q in $[\mathfrak{E}; p_j]$ ist genau dann stetig, wenn es ein $\varrho \geq 0$ und eine natürliche Zahl m gibt, so daß*

$$q(\mathfrak{x}) \leq \varrho \cdot (p_0(\mathfrak{x}) + \cdots + p_m(\mathfrak{x})) \tag{1}$$

gilt.

Beweis: I. Die Bedingung (1) ist offenbar hinreichend. II. (1) sei nicht erfüllt. Dann gibt es Elemente $\mathfrak{x}^{(r)} \in \mathfrak{E}$ und Zahlen $\varrho_r \geqq 0$ mit $\lim_{r \to \infty} \varrho_r = \infty$, so daß

$$q(\mathfrak{x}^{(r)}) \geqq \varrho_r (p_0(\mathfrak{x}^{(r)}) + \cdots + p_r(\mathfrak{x}^{(r)})) \qquad (r = 0, 1, \ldots)$$

gilt. Mit geeigneten Zahlenfaktoren a_r erhält man eine Folge $\mathfrak{y}^{(r)} = a_r \mathfrak{x}^{(r)}$, für die

$$\mathfrak{y}^{(r)} \to \mathfrak{o} \ [\mathfrak{E}; p_j] \quad \text{und} \quad q(\mathfrak{y}^{(r)}) \to \infty \qquad (r \to \infty)$$

gilt. q ist nicht stetig.

Satz 3. 3 (Überflüssige definierende Quasinormen). *Die Räume* $[\mathfrak{E}; p_j, q_i]$ *und* $[\mathfrak{E}; p_j]$ *haben genau dann denselben Konvergenzbegriff, wenn jedes* q_i *in* $[\mathfrak{E}; p_j]$ *stetig ist.*

Beweis: I. Die Bedingung ist hinreichend, wie man auf Grund von 3. 2 und 2. 3 erkennt.

II. q sei eines der q_i und nicht stetig in $[\mathfrak{E}; p_j]$. Die Behauptung ergibt sich aus dem Beweis zu 3. 2: Die Folge $\mathfrak{y}^{(r)}$ ist in $[\mathfrak{E}; p_j]$ konvergent, aber nicht in $[\mathfrak{E}; p_j, q_i]$.

Ist $[\mathfrak{E}; p_j, q_i]$ ein (F)-Raum, so ist im Falle I auch $[\mathfrak{E}; p_j]$ ein (F)-Raum.

Satz 3. 4 (Zerlegung linearer Funktionale). *Jedes lineare, stetige Funktional* f *in* $[\mathfrak{E}; p_j]$ *läßt sich darstellen in der Form*

$$f(\mathfrak{x}) = \sum_{j=0}^{\infty} f_j(\mathfrak{x}) \qquad (\mathfrak{x} \in \mathfrak{E}), \tag{2}$$

wo die f_j *lineare Funktionale in* $\mathfrak{E}$ *sind und weiter*

$$|f_j(\mathfrak{x})| \leqq \varrho_j \cdot p_j(\mathfrak{x}) \qquad (j = 0, 1, \ldots)$$

gilt mit gewissen $\varrho_j \geqq 0$, *von denen nur endlich viele von Null verschieden sind.*

Beweis: $|f(\mathfrak{x})|$ ist eine stetige Quasinorm in $[\mathfrak{E}; p_j]$. Nach 3. 2 gilt daher eine Ungleichung der Form

$$|f(\mathfrak{x})| \leqq \varrho \cdot (p_0(\mathfrak{x}) + \cdots + p_m(\mathfrak{x})).$$

Man nimmt zunächst $\varrho = m = 1$ an und betrachtet den Raum $\mathfrak{E} \times \mathfrak{E}$ der Elementepaare $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ mit $\mathfrak{x} \in \mathfrak{E}$, $\mathfrak{y} \in \mathfrak{E}$. In diesem erklärt man Addition und Zahlmultiplikation in natürlicher Weise. Dann ist $\mathfrak{E} \times \mathfrak{E} = [\mathfrak{E} \times \mathfrak{E}; q]$ ein linearer Raum und $q(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = p_0(\mathfrak{x}) + p_1(\mathfrak{y})$ eine Quasinorm in ihm. Man definiert $g(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}) = f(\mathfrak{x})$ und setzt nach 3. 1 das lineare Funktional g auf den ganzen Raum $\mathfrak{E} \times \mathfrak{E}$ fort, so daß

$$|g(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})| \leqq p_0(\mathfrak{x}) + p_1(\mathfrak{y})$$

gilt. Mit $f_0(\mathfrak{x}) = g(\mathfrak{x}, \mathfrak{o})$ und $f_1(\mathfrak{x}) = g(\mathfrak{o}, \mathfrak{x})$ erhält man die gewünschte Darstellung.

Die Übertragung des Beweises auf beliebige ϱ macht keine Schwierigkeiten. Ist $m > 1$, so zerlegt man mit der gezeigten Methode f in zwei lineare Funktionale f^* und f_m, so daß gilt:

$$f(\mathfrak{x}) = f^*(\mathfrak{x}) + f_m(\mathfrak{x}),$$

$$|f^*(\mathfrak{x})| \leqq \varrho \cdot (p_0(\mathfrak{x}) + \cdots + p_{m-1}(\mathfrak{x})); \quad |f_m(\mathfrak{x})| \leqq \varrho \cdot p_m(\mathfrak{x}).$$

Induktion ergibt die Behauptung.

Offenbar ist jedes lineare Funktional f, das eine Darstellung (2) mit den genannten Zusatzbedingungen gestattet, linear und stetig in $[\mathfrak{E}; p_j]$.

Satz 3. 5 (Lineare Unterräume und Funktionale). *$\mathfrak{F}$ sei ein linearer Unterraum in $[\mathfrak{E}; p_j]$. $\mathfrak{x}^* \in \mathfrak{E}$ sei in $[\mathfrak{E}; p_j]$ nicht Berührpunkt von $\mathfrak{F}$.*

a) *Dann gibt es ein lineares, stetiges Funktional f in $[\mathfrak{E}; p_j]$ mit der Eigenschaft*

$$f(\mathfrak{x}) = \begin{cases} 0 & (\mathfrak{x} \in \mathfrak{F}) \\ 1 & (\mathfrak{x} = \mathfrak{x}^*). \end{cases} \tag{3}$$

b) *Ist g ein lineares, stetiges Funktional in $[\mathfrak{E}; p_j]$, so gibt es ein lineares, stetiges Funktional h in $[\mathfrak{E}; p_j]$ mit der Eigenschaft*

$$h(\mathfrak{x}) = \begin{cases} g(\mathfrak{x}) & (\mathfrak{x} \in \mathfrak{F}) \\ b & (\mathfrak{x} = \mathfrak{x}^*), \end{cases} \tag{4}$$

wo b ein beliebiger, vorgegebener Zahlenwert ist.

Beweis: a) Es gibt ein $\varepsilon > 0$ und eine natürliche Zahl m, so daß

$$p_0(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}^*) + \cdots + p_m(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}^*) \geqq \varepsilon \qquad (\mathfrak{x} \in \mathfrak{F}) \tag{5}$$

ist. Sonst gäbe es nämlich Elemente $\mathfrak{x}^{(r)} \in \mathfrak{F}$, so daß die Zahlenfolge

$$p_0(\mathfrak{x}^{(r)} - \mathfrak{x}^*) + \cdots + p_r(\mathfrak{x}^{(r)} - \mathfrak{x}^*) \qquad (r = 0, 1, \ldots)$$

eine Nullfolge bildet. Daraus folgte aber $\mathfrak{x}^{(r)} \to \mathfrak{x}^*$ $[\mathfrak{E}; p_j]$.

Ist (5) erfüllt, so gibt es ein lineares Funktional f mit den Eigenschaften

$$f(\mathfrak{x}) = \begin{cases} 0 & (\mathfrak{x} \in \mathfrak{F}) \\ 1 & (\mathfrak{x} = \mathfrak{x}^*), \end{cases}$$

$$f(\mathfrak{x})| \leqq \frac{1}{\varepsilon}(p_0(\mathfrak{x}) + \cdots + p_m(\mathfrak{x}))$$

(das folgt aus 3. 1; man vgl. Banach [2], S. 57). f ist stetig in $[\mathfrak{E}; p_j]$.

b) Man setzt

$$h(\mathfrak{x}) = g(\mathfrak{x}) + (b - g(\mathfrak{x}^*)) \cdot f(\mathfrak{x}).$$

Ist $\mathfrak{x}^*$ Berührpunkt von $\mathfrak{F}$, so gibt es natürlich kein stetiges Funktional, das (3) erfüllt, und jedes mit g in $\mathfrak{F}$ übereinstimmende stetige Funktional h stimmt mit g auch in $\mathfrak{x}^*$ überein.

§ 4.
Sätze über (FK)-Räume.

Aus einigen Grundtypen von (FK)-Räumen und linearen, stetigen Funktionalen in solchen werden weitere Räume und Funktionale hergeleitet. Es ergibt sich, daß die Wirkfelder von Matrixverfahren (FK)-Räume und daß die durch Matrizen vermittelten Abbildungen von (FK)-Räumen stetig sind.

Die Beweise der beiden nächsten Sätze entnimmt man HAHN [9] und BANACH [2].

Satz 4. 1 ($\mathfrak{S}_K$, $\mathfrak{S}_B$, $\mathfrak{S}_C$, $\mathfrak{S}_N$, $\mathfrak{U}_A$). *Folgende Mengen sind* (FK)*-Räume mit den aufgeführten definierenden Quasinormen:*

$\mathfrak{S}_K$, *der Raum aller Stellen mit komplexen Koordinaten;*
Quasinormen: $|x_0|, |x_1|, \ldots$ [4]).

$\left.\begin{matrix}\mathfrak{S}_B, \text{ der Raum der beschränkten Folgen;}\\ \mathfrak{S}_C, \text{ der Raum der konvergenten Folgen;}\\ \mathfrak{S}_N, \text{ der Raum der Nullfolgen;}\end{matrix}\right\}$
Quasinorm: $\underset{k=0,1,\ldots}{\text{fin}} |x_k|$.

$\mathfrak{U}_A$, *der Raum der absolut konvergenten Reihen;*
Quasinorm: $\sum_{k=0}^{\infty} |x_k|$.

Satz 4. 2 (Lineare Funktionale in $[\mathfrak{S}_K]$, $[\mathfrak{S}_C]$, $[\mathfrak{S}_N]$). *Jedes lineare, stetige Funktional in* $[\mathfrak{S}_K]$, $[\mathfrak{S}_C]$ *bzw.* $[\mathfrak{S}_N]$ *ist in der Form* (1), (2) *bzw.* (3) *darstellbar:*

$$(1) \qquad f(\mathfrak{x}) = \sum_{k=0}^{m} \alpha_k x_k \qquad (\mathfrak{x} \in \mathfrak{S}_K)\ [5]),$$

$$(2) \qquad f(\mathfrak{x}) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k x_k + \alpha \lim_{k \to \infty} x_k \qquad (\textstyle\sum |\alpha_k| < \infty;\ \mathfrak{x} \in \mathfrak{S}_C),$$

$$(3) \qquad f(\mathfrak{x}) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k x_k \qquad (\textstyle\sum |\alpha_k| < \infty;\ \mathfrak{x} \in \mathfrak{S}_N).$$

Umgekehrt ist jedes Funktional der Form (1), (2) *bzw.* (3) *in* $[\mathfrak{S}_K]$, $[\mathfrak{S}_C]$ *bzw.* $[\mathfrak{S}_N]$ *linear und stetig.*

Satz 4. 3 (Abbildungen mit linearen Funktionalen). $\mathfrak{E}$ *und* $\mathfrak{F}$ *seien* (FK)*-Räume. Die Operation* $\mathfrak{y} = \Phi(\mathfrak{x})$ *bilde* $[\mathfrak{E}]$ *in* $[\mathfrak{F}]$ *ab. Für jedes* $n = 0, 1, \ldots$ *sei das Funktional*

$$y_n = f_n(\mathfrak{x}) \qquad (\mathfrak{y} = \Phi(\mathfrak{x}))$$

linear und stetig in $[\mathfrak{E}]$. *Dann ist auch* Φ *linear und stetig in* $[\mathfrak{E}]$.

---

[4]) Ausführlicher: Quasinormen: $p_0(\mathfrak{x}) = |x_0|, \ldots$.

[5]) Ausführlicher: Es gibt Zahlen α_k und m, so daß (1) gilt.

Beweis: Φ ist offenbar linear. Aus den Gleichungen

$$\begin{cases} \text{Es existiert } \lim\limits_{r\to\infty} \mathfrak{x}^{(r)} = \mathfrak{x} & [\mathfrak{E}]. \\ \text{Es existiert } \lim\limits_{r\to\infty} \Phi(\mathfrak{x}^{(r)}) = \mathfrak{z} & [\mathfrak{F}]. \end{cases}$$

folgt

$$\mathfrak{z} = \Phi(\mathfrak{x}).$$

Denn wegen der koordinatenweisen Konvergenz in $[\mathfrak{F}]$ und der Stetigkeit der f_n gilt

$$z_n = \lim_{r\to\infty} f_n(\mathfrak{x}^{(r)}) = f_n(\lim_{r\to\infty} \mathfrak{x}^{(r)}) = f_n(\mathfrak{x}) \quad (n = 0, 1, \ldots).$$

Nach Banach [2] (S. 41, Th. 7) ist Φ stetig.

Satz 4. 4 (Abbildungen mit Matrizen).

a) *Ein Funktional der Form* (1) *ist in jedem* (FK)*-Raum* $[\mathfrak{E}]$ *erklärt, linear und stetig.*

b) *Ein Funktional der Form*

$$f(\mathfrak{x}) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x_k \tag{4}$$

ist in jedem (FK)*-Raum* $[\mathfrak{E}]$, *in dem es erklärt ist, linear und stetig.*

c) *Bildet eine Matrix* $A = \{a_{nk}\}$ *einen* (FK)*-Raum* $[\mathfrak{E}]$ *in einen* (FK)*-Raum* $[\mathfrak{F}]$ *ab, so ist diese Abbildung linear und stetig. Im Falle* $\mathfrak{F} = \mathfrak{S}_C$ *ist insbesondere das Funktional* $A\text{-}\lim \mathfrak{x}$ *in* $[\mathfrak{E}]$ *linear und stetig.*

Beweis: a) Das Funktional ist linear in $\mathfrak{E}$. Die Stetigkeit ergibt sich aus der Eigenschaft (FK_1).

b) Man wendet 4. 3 an mit $\mathfrak{F} = \mathfrak{S}_C$ und

$$f_n(\mathfrak{x}) = \sum_{k=0}^{n} a_k x_k \qquad (n = 0, 1, \ldots).$$

c) Auf Grund von b) wendet man 4. 3 an mit

$$f_n(\mathfrak{x}) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} x_k \qquad (n = 0, 1, \ldots).$$

Die zweite Behauptung folgt nun daraus, daß $\lim\limits_{k\to\infty} x_k$ ein lineares, stetiges Funktional in $[\mathfrak{S}_C]$ ist (4. 2).

Satz 4. 5 (Vergleichbare (FK)-Räume). $\mathfrak{E}$ *und* $\mathfrak{F}$ *seien* (FK)*-Räume mit* $\mathfrak{E} \leq \mathfrak{F}$. *Dann gilt*

a) *Aus*

$$\lim_{r\to\infty} \mathfrak{x}^{(r)} = \mathfrak{x} \quad [\mathfrak{E}] \tag{5}$$

folgt

$$\lim_{r\to\infty} \mathfrak{x}^{(r)} = \mathfrak{x} \quad [\mathfrak{F}]. \tag{6}$$

b) *Ist* $\mathfrak{E} = \mathfrak{F}$, *so folgt umgekehrt auch aus* (6) *die Gültigkeit von* (5).

c) *Ist* $\mathfrak{E} \neq \mathfrak{F}$, *so bildet* $\mathfrak{E}$ *in* $[\mathfrak{F}]$ *eine magere Menge.*

Beweis: a) Die Matrix $E = \{e_{nk}\}$ mit

$$e_{nk} = \begin{cases} 1 & (n = k) \\ 0 & (n \neq k) \end{cases} \qquad (k, n = 0, 1, \ldots)$$

bildet $[\mathfrak{E}]$ in $[\mathfrak{F}]$ ab. Dabei ist $E(\mathfrak{x}) = \mathfrak{x}$. Nach 4. 4c ist die Abbildung stetig.

b) E bildet auch $[\mathfrak{F}]$ in $[\mathfrak{E}]$ ab.

c) E bildet $[\mathfrak{E}]$ linear und stetig auf den Unterraum $\mathfrak{E}$ in $[\mathfrak{F}]$ ab. Aus Banach [2] (S. 38, Th. 3) folgt die Behauptung.

Satz 4. 6 (Vereinigung von (FK)-Räumen). *Endlich oder abzählbar viele* (FK)-*Räume* $\mathfrak{E}^{(i)}$ $(i = 0, 1, \ldots)$ *seien gegeben. Es gelte*

$$\mathfrak{E}^{(i)} < \bigcup_j \mathfrak{E}^{(j)} \qquad (i = 0, 1, \ldots).$$

Dann ist der Koordinatenraum $\mathfrak{F} = \bigcup_j \mathfrak{E}^{(j)}$ *kein* (FK)-*Raum.*

Beweis: Es wird angenommen, $\mathfrak{F}$ sei ein (FK)-Raum. Nach 4. 5c ist jedes $\mathfrak{E}^{(i)}$ eine magere Menge in $[\mathfrak{F}]$, also ist auch $\bigcup \mathfrak{E}^{(i)}$ eine magere Menge in $[\mathfrak{F}]$. Ein (FK)-Raum ist aber nicht mager in sich (vgl. Banach [2], S. 14, Th. 2). Die Annahme führt also auf einen Widerspruch.

Satz 4. 7 (Durchschnitt von (FK)-Räumen). *Gegeben seien endlich oder abzählbar viele* (FK)-*Räume* $[\mathfrak{E}^{(i)}; p_{ji}]$ $(i = 0, 1, \ldots)$.

a) *Dann ist* $\mathfrak{F} = \bigcap \mathfrak{E}^{(i)}$ *ein* (FK)-*Raum* $[\mathfrak{F}]$ *mit den definierenden Quasinormen*

$$p_{ji}(\mathfrak{x}) \qquad (i, j = 0, 1, \ldots). \tag{7}$$

b) *Jedes lineare, stetige Funktional* f *in* $[\mathfrak{F}]$ *ist darstellbar in der Form*

$$f(\mathfrak{x}) = \sum_i f_i(\mathfrak{x}), \tag{8}$$

wo für jedes $i = 0, 1, \ldots$ f_i *ein lineares, stetiges Funktional in* $[\mathfrak{E}^{(i)}]$ *ist und nur endlich viele der* f_i *nicht identisch verschwinden.*

Beweis: a) $\mathfrak{F}$ ist ein linearer Koordinatenraum. $[\mathfrak{F}; p_{ji}]$ hat die Eigenschaften (F_1) und (F_2). Bilden die $\mathfrak{x}^{(r)}$ eine konzentrierte Folge in $[\mathfrak{F}; p_{ji}]$, so auch in jedem $[\mathfrak{E}^{(i)}]$. Die Folge hat daher in jedem $[\mathfrak{E}^{(i)}]$ ein Grenzelement $\mathfrak{y}^{(i)}$. Wegen (FK_1) sind alle $\mathfrak{y}^{(i)}$ gleich. Es gibt daher ein $\mathfrak{x}$ mit den Eigenschaften

$$\mathfrak{x} \in \mathfrak{E}^{(i)} \qquad (i = 0, 1, \ldots),$$

$$\lim_{r \to \infty} p_{i,}(\mathfrak{x}^{(r)} - \mathfrak{x}) = 0 \qquad (i, j = 0, 1, \ldots).$$

$\mathfrak{x}$ ist in $[\mathfrak{F}; p_{ji}]$ Grenzelement der Folge $\mathfrak{x}^{(r)}$. $[\mathfrak{F}; p_{ji}]$ hat also auch die Eigenschaft (F_2). Ganz ähnlich ergibt sich (FK_1).

b) Dies folgt aus 3. 4 und 3. 1.

Satz 4.8 (Durch Abbildungen definierte (FK)-Räume). *$\mathfrak{F} = [\mathfrak{F}; q_j]$ sei ein* (FK)*-Raum. Für jedes $n = 0, 1, \ldots$ sei $\mathfrak{E}^{(n)} = [\mathfrak{E}^{(n)}; p_{jn}]$ ein* (FK)*-Raum und f_n ein lineares, stetiges Funktional in $[\mathfrak{E}^{(n)}]$.*

a) *Dann ist die Menge $\mathfrak{E}$ der Stellen $\mathfrak{x}$, für die $f_n(\mathfrak{x})$ $(n = 0, 1, \ldots)$ erklärt ist und die Stelle $\mathfrak{y} = \{f_n(\mathfrak{x})\}$ dem Raum $\mathfrak{F}$ angehört, ein* (FK)*-Raum $[\mathfrak{E}]$ mit den definierenden Quasinormen*

$$p_{jn}(\mathfrak{x}) \quad \text{und} \quad q_j(\mathfrak{y}) \qquad (j, n = 0, 1, \ldots). \tag{9}$$

b) *Jedes lineare, stetige Funktional f in $[\mathfrak{E}]$ ist darstellbar in der Form*

$$f(\mathfrak{x}) = g(\mathfrak{x}) + h(\mathfrak{y}) \qquad (\mathfrak{y} = \{f_n(\mathfrak{x})\}), \tag{10}$$

wo g und h lineare, stetige Funktionale in $[\bigcap \mathfrak{E}^{(n)}]$ bzw. $[\mathfrak{F}]$ sind.

Beweis: a) $\mathfrak{E}$ ist ein linearer Koordinatenraum. Mit den aufgeführten Quasinormen hat $\mathfrak{E} = [\mathfrak{E}; p_{jn}, q_j]$ die Eigenschaften (F_1) und (F_2). Bilden die $\mathfrak{x}^{(r)}$ eine konzentrierte Folge in $[\mathfrak{E}]$, so gibt es ein $\mathfrak{x} \in \bigcap \mathfrak{E}^{(n)}$, so daß

$$\mathfrak{x}^{(r)} \to \mathfrak{x} \quad [\bigcap \mathfrak{E}^{(n)}]$$

gilt (vgl. 4.7), sowie ein $\mathfrak{z} \in \mathfrak{F}$, so daß

$$\mathfrak{y}^{(r)} \to \mathfrak{z} \quad [\mathfrak{F}]$$

gilt. Wegen der koordinatenweisen Konvergenz in $[\mathfrak{F}]$ und der Stetigkeit der f_n folgt

$$z_n = \lim_{r \to \infty} f_n(\mathfrak{x}^{(r)}) = f_n\Big(\lim_{r \to \infty} \mathfrak{x}^{(r)}\Big) = f_n(\mathfrak{x}) \quad (n = 0, 1, \ldots).$$

$\mathfrak{x}$ ist das Grenzelement der Folge $\mathfrak{x}^{(r)}$ in $[\mathfrak{E}]$. Also ist (F_3) erfüllt. (FK_1) gilt in $[\bigcap \mathfrak{E}^{(n)}]$, also erst recht in $[\mathfrak{E}]$.

b) Das folgt aus 3.4 und 3.1.

Satz 4.9 (Durch Reihen definierte Räume). *Gegeben seien die Zahlen α_k $(k = 0, 1, \ldots)$. Dann bildet die Menge $\mathfrak{E}$ der Stellen $\mathfrak{x}$, für die $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k x_k$ existiert, einen* (FK)*-Raum $[\mathfrak{E}]$ mit den definierenden Quasinormen*

$$|x_0|, \ |x_1|, \ \ldots, \tag{11}$$

$$\operatorname*{fin}_{l = 0, 1, \ldots} \Big| \sum_{k=0}^{l} \alpha_k x_k \Big|. \tag{12}$$

Sind nur endlich viele der α_k von Null verschieden, so kann die Quasinorm (12) *weggelassen werden. Sind alle α_k von Null verschieden, so können die Quasinormen* (11) *weggelassen werden.*

Beweis: Man wendet 4.8 an mit

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{S}_C, \quad \mathfrak{E}^{(n)} = \mathfrak{S}_K, \quad f_n(\mathfrak{x}) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k x_k \quad (n = 0, 1, \ldots).$$

Die danach mehrfach auftretenden Quasinormen $|x_j|$ müssen nach 3. 3 nur je einmal aufgeführt werden. Ebenso folgen die Zusatzbehauptungen aus 3. 3.

Satz 4. 10 (Durch Matrizen definierte (FK)-Räume). *$A = \{a_{nk}\}$ sei eine Matrix, $[\mathfrak{F}; q_j]$ ein* (FK)*-Raum.*

a) *Dann bildet die Menge $\mathfrak{E} = \mathfrak{F}_A$ der Stellen $\mathfrak{x}$, deren A-Transformierte $A(\mathfrak{x})$ existiert und in $\mathfrak{F}$ liegt, einen* (FK)*-Raum $[\mathfrak{F}_A]$ mit den definierenden Quasinormen*

$$\text{(13)} \qquad \overline{\underset{l=0,1,\ldots}{\text{fin}}} \left| \sum_{k=0}^{l} a_{0k} x_k \right|, \quad \overline{\underset{l=0,1,\ldots}{\text{fin}}} \left| \sum_{k=0}^{l} a_{1k} x_k \right|, \ldots;$$

$$\text{(14)} \qquad |x_0|, \ |x_1|, \ldots;$$

$$\text{(15)} \qquad q_0(A(\mathfrak{x})), \ q_1(A(\mathfrak{x})), \ldots.$$

b) *Ist A zeilenfinit, so können die unter* (13) *verzeichneten Quasinormen weggelassen werden.*

c) *Ist A zeilenfinit und folgt $\mathfrak{x} = \mathfrak{o}$ aus $A(\mathfrak{x}) = \mathfrak{o}$, so können die unter* (13) *und* (14) *genannten Quasinormen weggelassen werden.*

Beweis: Man wendet 4. 8 an mit

$$f_n(\mathfrak{x}) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} x_k \qquad (n = 0, 1, \ldots).$$

Nach 4. 9 erfüllen die f_n ja die Bedingungen des Satzes. So folgen die Behauptungen a) und b). Zu c): Es ist zu zeigen, daß jede der Quasinormen $|x_i|$ stetig ist in $[\mathfrak{E}; q_j]$. Es wird angenommen, dies sei nicht der Fall. Dann gibt es eine Folge von Elementen $\mathfrak{x}^{(r)} \in \mathfrak{E}$, für die mit einem gewissen $\mathfrak{y}$ gilt

$$A(\mathfrak{x}^{(r)}) \to \mathfrak{y} \quad [\mathfrak{F}],$$

die aber nicht in $[\mathfrak{S}_K]$ konvergent ist. Aus der Folge $\mathfrak{x}^{(r)}$ kann man zwei Teilfolgen auswählen, die in $[\mathfrak{S}_K]$ gegen zwei verschiedene Grenzelemente $\mathfrak{x}$ bzw. $\mathfrak{z}$ konvergieren. Da A zeilenfinit ist und $\mathfrak{F}$ (FK_1) erfüllt, gilt $A(\mathfrak{x}) = \mathfrak{y}$ und $A(\mathfrak{z}) = \mathfrak{y}$, also $A(\mathfrak{x} - \mathfrak{z}) = \mathfrak{o}$ im Widerspruch zur Voraussetzung.

Zusatz: Man kann zulassen, daß die a_{nk} den Wert „∞“ haben. Man definiert

$$\infty \cdot a = \begin{cases} 0 & (a = 0) \\ \infty & (a \neq 0). \end{cases}$$

Dann sind alle Summen $\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} x_k$ erklärt für solche und nur für solche $\mathfrak{x}$, deren k-te Koordinate verschwindet, wenn in der k-ten Spalte der Matrix der Wert ∞ auftritt. Alle Behauptungen in 4. 10 gelten auch für die Matrizen der eben genannten Art.

Es wird noch besonders hingewiesen auf die in 4. 10 eingeführte Bezeichnung $\mathfrak{F}_A$.

Satz 4. 11 (Lineare Funktionale in $[\mathfrak{F}A]$). *Die Voraussetzungen seien dieselben wie in* 4. 10 a, b *bzw. c. Weiter sei* f *ein lineares, stetiges Funktional in* $[\mathfrak{F}A]$. *Dann gelten die Behauptungen:*

a) *Es gibt eine Darstellung*

$$f(\mathfrak{x}) = g(A(\mathfrak{x})) + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k x_k, \tag{16}$$

wo g *ein lineares stetiges Funktional in* $[\mathfrak{F}]$ *ist.*

b) *Die Darstellung* (16) *kann so gewählt werden, daß nur endlich viele der* α_k *von Null verchieden sind.*

c) *Es gibt eine Darstellung* (16), *in der alle* α_k *verschwinden.*

Beweis: h sei ein lineares Funktional in $\mathfrak{F}A$. Es gelte

$$|h(\mathfrak{x})| \leqq \varrho \cdot p(\mathfrak{x}),$$

wo $\varrho \geqq 0$ und p eine der in 4. 10 unter (13) oder (14) aufgeführten Quasinormen ist. Dann gibt es eine Darstellung

$$h(\mathfrak{x}) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k x_k,$$

denn für jedes $\mathfrak{x} \in \mathfrak{F}A$ gilt mit

$$\mathfrak{x}^{(r)} = \{x_0, \ldots, x_r, 0, \ldots\}$$

die Beziehung

$$\lim_{r \to \infty} p(\mathfrak{x}^{(r)} - \mathfrak{x}) = 0.$$

Die Behauptungen folgen nun aus 3. 4 und 3. 1.

§ 5.

Räume der Form $\mathfrak{S}_C A$.

In diesem Paragraphen wird gezeigt, daß die Wirkfelder von Matrixverfahren (FK)-Räume sind. Weiter werden die linearen, stetigen Funktionale in diesen (FK)-Räumen untersucht. Die Beweise beruhen auf den Sätzen des § 4.

Satz 5. 1 (Wirkfelder von Matrizen). $A = \{a_{nk}\}$ *sei eine beliebige Matrix.*

a) *Dann ist die Menge* $\mathfrak{S}_C A$ *– also das Wirkfeld der Matrix*[6]) *— ein* (FK)*-Raum mit den definierenden Quasinormen*

$$\overline{\operatorname{fin}}_{l=0,1\ldots} \Big|\sum_{k=0}^{l} a_{0k} x_k\Big|, \ \overline{\operatorname{fin}}_{l=0,1\ldots} \Big|\sum_{k=0}^{l} a_{1k} x_k\Big|, \ \ldots; \tag{1}$$

$$|x_0|, |x_1| \ldots; \tag{2}$$

$$\overline{\operatorname{fin}}_{n=0,1\ldots} \Big|\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} x_k\Big|. \tag{3}$$

[6]) Statt Matrixverfahren wird abkürzend auch Matrix gesagt, z. B. permanente Matrix, stärkere Matrix usw.

b) *Ist A zeilenfinit, so können die unter* (1) *aufgeführten Quasinormen weggelassen werden.*

c) *Ist A zeilenfinit und folgt $\mathfrak{x} = \mathfrak{o}$ aus $A(\mathfrak{x}) = \mathfrak{o}$, so können die unter* (1) *und* (2) *genannten Quasinormen weggelassen werden.*

Beweis: Die Behauptungen folgen aus 4.1 und 4.10.

Satz 5.2 (Lineare Funktionale in $[\mathfrak{S}_C A]$). *A sei irgendeine Matrix, f ein lineares, stetiges Funktional im (FK)-Raum $[\mathfrak{S}_C A]$.*

a) *Dann läßt sich f darstellen in der Form*

$$f(\mathfrak{x}) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k x_k + \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n y_n + \beta \cdot \lim_{n \to \infty} y_n \tag{4}$$

$$(\mathfrak{x} \in \mathfrak{S}_C A;\ \mathfrak{y} = A(\mathfrak{x});\ \sum |\beta_n| < \infty).$$

b) *Ist A zeilenfinit, so kann die Darstellung* (4) *so gewählt werden, daß nur endlich viele der α_k von Null verschieden sind.*

c) *Ist A zeilenfinit und folgt $\mathfrak{x} = \mathfrak{o}$ aus $A(\mathfrak{x}) = \mathfrak{o}$, so gibt es eine Darstellung der Form* (4), *in der alle α_k verschwinden.*

d) *Ist A konvergenztreu, so gilt $\sum_{k=0}^{\infty} |\alpha_k| < \infty$.*

Beweis: a, b, c) Die Behauptungen folgen aus 4.2 und 4.11. d) $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k x_k$ ist erklärt für alle $\mathfrak{x} \in \mathfrak{S}_C$. Daraus folgt bekanntlich die Behauptung.

Satz 5.3 (Darstellung linearer Funktionale mit Matrizen). *A und f seien wie in 5.2 definiert.*

a) *Dann gibt es eine Matrix B mit den Eigenschaften*

$$\mathfrak{S}_C B \supseteq \mathfrak{S}_C A;\ f(\mathfrak{x}) = B\text{-}\lim \mathfrak{x} \qquad (\mathfrak{x} \in \mathfrak{S}_C A).$$

b) *Gibt es für f eine Darstellung* (4) *mit $\beta \neq 0$, so kann B sogar so gewählt werden, daß $\mathfrak{S}_C B = \mathfrak{S}_C A$ ist.*

Beweis: a) f ist in der Form (4) darstellbar. Man konstruiert eine Matrix $D = \{d_{nk}\}$ nach der Vorschrift

$$d_{nk} = \begin{cases} \beta_k & (k < n) \\ \beta & (k = n) \\ 0 & (k > n) \end{cases} \qquad (k, n = 0, 1, \ldots)$$

und setzt $C = DA$. Da D konvergenztreu und zeilenfinit ist, gilt $\mathfrak{S}_C C \supseteq \mathfrak{S}_C A$ und

$$C\text{-}\lim \mathfrak{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n y_n + \beta \cdot \lim_{n \to \infty} y_n \qquad (\mathfrak{x} \in \mathfrak{S}_C A;\ \mathfrak{y} = A(\mathfrak{x})).$$

Nun setzt man $B = \{b_{nk}\}$ mit

$$b_{nk} = \begin{cases} \alpha_k & (n = 0) \\ \alpha_k + c_{n-1,k} & (n \neq 0) \end{cases} \qquad (n, k = 0, 1, \ldots).$$

Dann ist $\mathfrak{S}_C B \supseteq \mathfrak{S}_C A$ und

$$B\text{-lim } \mathfrak{x} = C\text{-lim } \mathfrak{x} + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k x_k = f(\mathfrak{x}) \qquad (\mathfrak{x} \in \mathfrak{S}_C A).$$

B genügt den Forderungen des Satzes.

b) Gilt im vorigen $\beta \neq 0$, so ist $\mathfrak{S}_C D = \mathfrak{S}_C$ (Mazur [12]; man beweist dies auch leicht mit Hilfe von 7. 1). Da D dann weiter eine umkehrbare Dreiecksmatrix ist, gilt $\mathfrak{S}_C C = \mathfrak{S}_C A$ und $\mathfrak{S}_C B = \mathfrak{S}_C A$.

Für die weiteren Untersuchungen werden noch zwei spezielle (FK)-Räume erklärt.

Satz 5. 4 (Der Raum $x_k = o(d_k)$). *Für die Zahlen d_k gelte*

$$0 \leqq d_k \leqq \infty,$$

$$d_k \begin{cases} = 0 & (k \in \mathfrak{N}_0) \\ \neq 0, \infty & (k \in \mathfrak{N}_1) \\ = \infty & (k \in \mathfrak{N}_2). \end{cases} \tag{5}$$

a) *Dann bildet die Menge $\mathfrak{D}$ der Stellen $\mathfrak{x}$ mit $x_k = o(d_k)$ einen (FK)-Raum mit den definierenden Quasinormen*

$$|x_k| \qquad (k \in \mathfrak{N}_2); \tag{6}$$

$$\overline{\underset{k \in \mathfrak{N}_1}{\text{fin}}} \left| \frac{x_k}{d_k} \right|. \tag{7}$$

b) *Ist f ein lineares, stetiges Funktional im (FK)-Raum $[\mathfrak{D}]$, so gilt eine Darstellung der Form*

$$f(\mathfrak{x}) = \sum_{k \in \mathfrak{N}_2} \alpha_k x_k + \sum_{k \in \mathfrak{N}_1} \frac{\beta_k}{d_k} x_k = \sum_{k=0}^{\infty} \delta_k x_k \qquad (\mathfrak{x} \in \mathfrak{D}), \tag{8}$$

wo nur endlich viele der α_k nicht verschwinden und $\sum\limits_{k \in \mathfrak{N}_1} |\beta_k| < \infty$ ist.

c) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |\delta_k| < \infty$ *folgt u. a. aus*

$$\lim_{k \to \infty} d_k = \infty; \; d_k \neq 0 \qquad (k = 0, 1, \ldots). \tag{9}$$

Dabei bedeutet $x_k = o(d_k)$:

$$\begin{cases} x_k = 0 & (k \in \mathfrak{N}_0) \\ \dfrac{x_k}{d_k} \to 0 & (k \to \infty \text{ auf } \mathfrak{N}_1) \\ x_k \text{ beliebig} & (k \in \mathfrak{N}_2). \end{cases}$$

Beweis: a) Man konstruiert eine Matrix $D = \{d_{nk}\}$ mit

$$d_{nn} = \begin{cases} \infty & (n \in \mathfrak{N}_0) \\ \dfrac{1}{d_n} & (n \in \mathfrak{N}_1) \\ 0 & (n \in \mathfrak{N}_2), \end{cases}$$

$$d_{nk} = 0 \qquad (n \neq k; \; n, k = 0, 1, \ldots).$$

$\mathfrak{D}$ ist dann identisch mit dem Raum $\mathfrak{S}_N D$. Die Behauptung folgt nun aus 4. 1, 4. 10 und 3. 3.

b) Die Behauptung ergibt sich aus 3. 4 und 4. 2 (vgl. 4. 11).

c) Das ist evident.

Satz 5. 5 (Der Raum $(x_k - x_{k-1}) = o(c_k)$). *Für die Zahlen c_k gelte*

$$0 \leqq c_k \leqq \infty,$$

$$c_k \begin{cases} = 0 & (k \in \mathfrak{M}_0) \\ \neq 0, \infty & (k \in \mathfrak{M}_1) \\ = \infty & (k \in \mathfrak{M}_2). \end{cases}$$

a) *Dann bildet die Menge $\mathfrak{C}$ der Stellen $\mathfrak{x}$ mit $(x_k - x_{k-1}) = o(c_k)$* [7]) *einen (FK)-Raum $[\mathfrak{C}]$ mit den definierenden Quasinormen*

$$|x_k - x_{k-1}| \qquad (k \in \mathfrak{M}_2) \tag{11}$$

$$\overline{\underset{k \in \mathfrak{M}_1}{\text{fin}}} \left| \frac{x_k - x_{k-1}}{c_k} \right|. \tag{12}$$

b) *Jedes lineare, stetige Funktional f in $[\mathfrak{C}]$ ist darstellbar in der Form*

$$f(\mathfrak{x}) = \sum_{k \in \mathfrak{M}_2} \alpha_k (x_k - x_{k-1}) + \sum_{k \in \mathfrak{M}_1} \frac{\beta_k}{c_k} (x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k (x_k - x_{k-1}) \tag{13}$$

$$(\mathfrak{x} \in \mathfrak{C}),$$

wo nur endlich viele der α_k nicht verschwinden und $\sum_{k \in \mathfrak{M}_1} |\beta_k| < \infty$ ist.

c) *Gilt weiter*

$$\sum_{k \in \mathfrak{M}_1} c_k = \infty \text{ oder } c_k = \infty \text{ für unendlich viele } k \tag{14}$$

und existiert $\lim \gamma_k = \gamma$ $(k \to \infty$ *auf* $\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M})$, *so ist* $\gamma = 0$.

Beweis: a, b) Man setzt $T = \{t_{nk}\}$ mit

$$t_{nk} = \begin{cases} 1 & (n = k) \\ -1 & (n = k+1) \\ 0 & (\text{sonst}) \end{cases} \qquad (n, k = 0, 1, \ldots).$$

Dann ist T eine umkehrbare Dreiecksmatrix und es gilt

$$T(\{x_k\}) = \{x_k - x_{k-1}\}.$$

Bezeichnet man mit $\mathfrak{C}'$ den Raum der Stellen $\mathfrak{y}$ mit $y_k = o(c_k)$, so ist $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}' T$. Die Behauptungen folgen nun aus 4. 10c, 4. 11c und 5. 4.

c) Das ergibt sich im ersten Fall aus $\sum |\beta_k| < \infty$, im zweiten daraus, daß unendlich viele $\gamma_k (k \in \mathfrak{M}_2)$ verschwinden.

---

[7]) In solchen Formeln ist $x_{-1} = 0$ zu setzen.

Definition 5.6 ($\chi(A)$). *Ist* $A = \{a_{nk}\}$ *eine konvergenztreue Matrix, so wird mit* $\chi(A)$ *die Zahl*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} - \sum_{k=0}^{\infty} \lim_{n\to\infty} a_{nk}$$

bezeichnet.

Im folgenden wird sich erweisen, daß den Matrizen mit $\chi(A) = 0$ eine Ausnahmestellung zukommt.

Satz 5.7 (Lineare Funktionale in $[\mathfrak{S}_C A \cap \mathfrak{C} \cap \mathfrak{D}]$). $A = \{a_{nk}\}$ *sei eine konvergenztreue Matrix.* c_k, d_k, $\mathfrak{C}$ *und* $\mathfrak{D}$ *seien wie in* 5.4 *und* 5.5 *definiert. Es gelte* (9) *und* (14). f *sei ein lineares, stetiges Funktional in* $[\mathfrak{S}_C A \cap \mathfrak{C} \cap \mathfrak{D}]$.

a) *Dann gibt es eine Darstellung*

$$f(\mathfrak{x}) = \beta \cdot \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} x_k + \sum_{k=0}^{\infty} \vartheta_k (x_k - x_{k-1}) \tag{15}$$

$$(\mathfrak{x} \in \mathfrak{S}_B \cap \mathfrak{S}_C A \cap \mathfrak{C} \cap \mathfrak{D}).$$

b) *Aus* $f(\mathfrak{x}) = 0$ $(\mathfrak{x} \in \mathfrak{S}_C \cap \mathfrak{C})$ *folgt* $f(\mathfrak{x}) = 0$ $(\mathfrak{x} \in \mathfrak{S}_B \cap \mathfrak{S}_C A \cap \mathfrak{C} \cap \mathfrak{D})$, *wenn* $\chi(A) \neq 0$ *ist.*

c) *Aus* $f(\mathfrak{x}) = 0$ $(\mathfrak{x} \in \mathfrak{S}_N \cap \mathfrak{C})$ *folgt* $f(\mathfrak{x}) = 0$ $(\mathfrak{x} \in \mathfrak{S}_C \cap \mathfrak{S}_C A \cap \mathfrak{C} \cap \mathfrak{D})$, *wenn* $\chi(A) = 0$ *ist.*

Beweis: a) Aus 4.7b, 5.2a, 5.4b und 5.5b folgt, daß f darstellbar ist in der Form

$$f(\mathfrak{x}) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k x_k + \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n y_n + \beta \cdot \lim_{n\to\infty} y_n + \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k (x_k - x_{k-1}) + \sum_{k=0}^{\infty} \delta_k x^k$$

$$(\mathfrak{x} \in \mathfrak{S}_C A \cap \mathfrak{C} \cap \mathfrak{D};\ \mathfrak{y} = A(\mathfrak{x});\ \sum |\beta_n| < \infty).$$

A erfüllt die Bedingung (Zn.) Für jedes $\mathfrak{x} \in \mathfrak{S}_B$ gilt daher

$$\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n y_n = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} x_k = \sum_{k=0}^{\infty} x_k \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n a_{nk} = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k x_k,$$

und es ist $\sum |\varepsilon_k| < \infty$. 5.2d und 5.4c entnimmt man, daß auch $\sum |\alpha_k| < \infty$ und $\sum |\delta_k| < \infty$ gilt. Daher ist für jedes $\mathfrak{x} \in \mathfrak{S}_B$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\alpha_k + \delta_k + \varepsilon_k) x_k = \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k x_k = \sum_{k=0}^{\infty} (x_k - x_{k-1}) \sum_{j=k}^{\infty} \xi_j,$$

und es gilt eine Darstellung (15) mit

$$\vartheta_k = \gamma_k + \sum_{j=k}^{\infty} \xi_j;\ \sum |\xi_j| < \infty. \tag{16}$$

b) Die Stellen $\mathfrak{e}_l^* (l \in \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2)$ gehören $\mathfrak{S}_C \cap \mathfrak{C}$ an. Es ist

$$f(\mathfrak{e}_l^*) = \beta \cdot \lim_{n\to\infty} \sum_{k=l}^{\infty} a_{nk} + \vartheta_l = 0 \qquad (l \in \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2). \tag{17}$$

Also existiert

$$\lim \vartheta_l = 0 - \beta \cdot \chi(A) \qquad (l \to \infty \text{ auf } \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2).$$

Wegen (16) und 5.5c ist $\lim \vartheta_l = 0$. Daraus folgt $\beta = 0$ und aus (17) $\vartheta_l = 0$ $(l \in \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2)$. Da $(x_k - x_{k-1}) = 0$ $(k \in \mathfrak{M}_0)$ gilt, ergibt (15) die Behauptung.

c) Wegen $(\mathfrak{e}_k^* - \mathfrak{e}_l^*) \in \mathfrak{S}_N$ ist mit einer gewissen Zahl a

$$f(\mathfrak{e}_l^*) = \beta \cdot \lim_{n \to \infty} \sum_{k=l}^{\infty} a_{nk} + \vartheta_l = a \qquad (l \in \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2). \tag{18}$$

Wie in 5.7b ergibt sich

$$0 = \lim \vartheta_l = a - \beta \cdot \chi(A),$$

also $a = 0$, woraus leicht die Behauptung folgt. —

Wählt man $c_k = d_k = \infty$ $(k = 0, 1, \ldots)$, so ist $\mathfrak{C} = \mathfrak{D} = \mathfrak{S}_K$ und es gelten (9) und (14). Die Behauptungen des Satzes 5.7 bleiben also richtig, wenn man überall $\mathfrak{S}_C A \cap \mathfrak{C} \cap \mathfrak{D}$ durch $\mathfrak{S}_C A$ ersetzt.

Satz 5.8 (β und $\chi(A)$). *A sei eine konvergenztreue Matrix, die Matrix C nicht schwächer als A. Bedeutet β die in der Darstellung (4) des Funktionals $f(\mathfrak{x}) = C\text{-}\lim \mathfrak{x}$ genannte Zahl (vgl. 4.4c), so gilt*

$$\chi(C) = \beta \cdot \chi(A). \tag{19}$$

Beweis: C ist konvergenztreu. Also existiert

$$\lim_{l \to \infty} f(\mathfrak{e}_l^*) = \chi(C).$$

Andererseits folgt wie in 5.7b

$$\lim_{l \to \infty} f(\mathfrak{e}_l^*) = \beta \cdot \chi(A).$$

§ 6.

Verträglichkeitssätze.

Satz 6.1 (Gleichstarke permanente Matrizen). *A sei eine konvergenztreue Matrix.*

a) *Ist in $[\mathfrak{S}_C A]$ die Stelle $\mathfrak{e}_0^*$ nicht Berührpunkt von $\mathfrak{S}_N$, so gibt es eine permanente Matrix B mit demselben Konvergenzfeld wie A.*

b) *Ist in $[\mathfrak{S}_C A]$ die Stelle $\mathfrak{e}_0^*$ Berührpunkt von $\mathfrak{S}_N$, so gibt es keine permanente Matrix B, die nicht schwächer als A ist.*

Beweis: a) Nach 3.5a gibt es ein lineares, stetiges Funktional f in $[\mathfrak{S}_C A]$ mit den Eigenschaften

$$f(\mathfrak{e}_0^*) = 1\,; \; f(\mathfrak{e}_k) = 0 \qquad (k = 0, 1, \ldots).$$

f kann nach 5.3a mit einer Matrix C dargestellt werden. C ist offenbar permanent, also $\chi(C) = 1$. Damit A die in 6.1a geforderte Eigenschaft hat, ist wegen 5.8 (19) notwendig (übrigens aber nicht hinreichend), daß $\chi(A) \neq 0$ ist. Aus 5.8 und 5.3b folgt, daß f auch mit einer (permanenten) Matrix B dargestellt werden kann, für die $\mathfrak{S}_C B = \mathfrak{S}_C A$ gilt.

b) Ist B irgendeine permanente Matrix, so ist $\mathfrak{e}_0^*$ in $[\mathfrak{S}_C B]$ nicht Berührpunkt von $\mathfrak{S}_N$, denn für jedes $\mathfrak{x} \in \mathfrak{S}_N$ ist

$$\overline{\operatorname{fin}}_{n=0,1,\ldots} |\sum_{k=0}^{\infty} b_{nk}(x_k - 1)| \geqq 1.$$

Wegen 4.5a gilt nicht $\mathfrak{S}_C B \geq \mathfrak{S}_C A$.

Satz 6.2 (Gleichstarke Matrizen). *A sei eine konvergenztreue Matrix, die Matrix C nicht schwächer als A.*

a) *Ist $\chi(A) = 0$, so auch $\chi(C) = 0$.*

b) *Ist $\chi(A) \neq 0$ und $\chi(C) \neq 0$, so gibt es eine mit C verträgliche Matrix B, die dasselbe Konvergenzfeld wie A hat.*

c) *Ist $\chi(A) \neq 0$ und $\chi(C) = 0$, so gibt es keine mit C verträgliche Matrix B, die dasselbe Konvergenzfeld wie A hat.*

Beweis: a) Dies folgt direkt aus 5.8.

b) Ähnlich wie in 6.1a folgt die Behauptung aus 5.8 und 5.3b.

c) Ist $\mathfrak{S}_C B = \mathfrak{S}_C A$, so gilt nach 5.8 $\chi(B) \neq 0$. Ist aber B mit C verträglich, so gilt $\chi(B) = \chi(C) = 0$. Beide Eigenschaften sind also nicht vereinbar.

Satz 6.3 (Verträglichkeit mit stärkeren Verfahren). *$A = \{a_{nk}\}$ sei eine konvergenztreue Matrix.*

a) *Die Stelle $\mathfrak{x}^* \in \mathfrak{S}_C A$ sei in $[\mathfrak{S}_C A]$ Berührpunkt von $\mathfrak{S}_C$. Die Matrix $B = \{b_{nk}\}$ sei nicht schwächer als A und es gelte*

$$(1) \quad \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_{nk} = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_{nk} \\ \lim\limits_{n\to\infty} a_{nk} = \lim\limits_{n\to\infty} b_{nk} \qquad (k = 0, 1, \ldots). \end{cases}$$

Dann ist B-lim $\mathfrak{x}^* = A$-lim $\mathfrak{x}^*$.

b) *Die Stelle $\mathfrak{x}^* \in \mathfrak{S}_C A$ sei in $[\mathfrak{S}_C A]$ nicht Berührpunkt von $\mathfrak{S}_C$. Dann gibt es zu jeder Zahl b eine Matrix $B = \{b_{nk}\}$, die nicht schwächer als A ist, Eigenschaft (1) besitzt und $\mathfrak{x}^*$ zum Werte b limitiert. Ist $\chi(A) \neq 0$, so kann B sogar so gewählt werden, daß A und B gleichstark sind.*

Beweis: a) Die Funktionale A-lim $\mathfrak{x}$ und B-lim $\mathfrak{x}$ sind in $[\mathfrak{S}_C]$ erklärt, linear und stetig, also in der Form (2) aus § 4 darstellbar. Mit Hilfe dieser Form ergibt sich aus (1)

$$B\text{-lim } \mathfrak{x} = A\text{-lim } \mathfrak{x} \qquad (\mathfrak{x} \in \mathfrak{S}_C).$$

Beide Funktionale sind auch in $[\mathfrak{S}_C A]$ erklärt und stetig, woraus nun die Behauptung folgt.

b) Die erste Behauptung folgt aus 3.5b und 5.3a, die zweite anschließend mit 5.8 und 5.3b.

Ist A permanent, so besagt (1), daß auch B permanent ist. $\mathfrak{x}^*$ ist genau dann Berührpunkt von $\mathfrak{S}_C$, wenn es eine Folge von Stellen $\mathfrak{x}^{(r)} \in \mathfrak{S}_C$ gibt, die in $[\mathfrak{S}_C A]$ gegen $\mathfrak{x}^*$ konvergiert; aber auch genau

dann, wenn jedes lineare, stetige Funktional f in $[\mathfrak{S}_C A]$, das im Unterraum $\mathfrak{S}_C$ verschwindet, auch in $\mathfrak{x}^*$ den Wert Null hat (vgl. 3.5). Auf letztere Weise ergeben sich z. B. die von Mazur [12] aufgestellten Verträglichkeitsbedingungen für umkehrbare, permanente Dreiecksmatrizen.

Satz 6.4 (Verträglichkeit bezüglich beschränkter Folgen). *$A = \{a_{nk}\}$ sei eine konvergenztreue Matrix mit $\chi(A) \neq 0$; sie limitiere die beschränkte Zahlenfolge $\mathfrak{x}^*$. $B = \{b_{nk}\}$ sei nicht schwächer als A und genüge der Gleichung* (1). *Dann ist* $B\text{-}\lim \mathfrak{x}^* = A\text{-}\lim \mathfrak{x}^*$.

Beweis: Nach 5.7b uud 3.5 ist $\mathfrak{x}^*$ in $[\mathfrak{S}_C A]$ Berührpunkt von $\mathfrak{S}_C$. Mit 6.3 folgt die Behauptung. —

Der Satz bleibt übrigens noch richtig, wenn man

$$\mathfrak{S}_C B \cap \mathfrak{S}_B \geqq \mathfrak{S}_C A \cap \mathfrak{S}_B$$

statt $\mathfrak{S}_C B \geqq \mathfrak{S}_C A$ voraussetzt (vgl. Broudno [4] und § 9).

§ 7.

Limitierbarkeit unbeschränkter Folgen.

Satz 7.1 (Existenz unbeschränkter Folgen im Wirkfeld). *Limitiert eine konvergenztreue Matrix A eine beschränkte divergente Folge, so auch eine unbeschränkte.*

Dieser Satz ist in dem folgenden enthalten:

Satz 7.2 (Erweiterung von 7.1). *$A = \{a_{nk}\}$ sei eine konvergenztreue Matrix. c_k und d_k seien Zahlen mit $0 \leqq c_k$, $d_k \leqq \infty$ $(k = 0, 1, \ldots)$, die die Bedingungen* (9) *und* (14) *aus* § 5 *erfüllen. $\mathfrak{x}$ sei eine Stelle mit den Eigenschaften*

$$\mathfrak{x} \bar{\in} \mathfrak{S}_C,\ \mathfrak{x} \in \mathfrak{S}_B,\ \mathfrak{x} \in \mathfrak{S}_C A,\ x_k = o(d_k),\ (x_k - x_{k-1}) = o(c_k).$$

Dann gibt es eine Stelle $\mathfrak{y}$ mit den Eigenschaften

$$\mathfrak{y} \bar{\in} \mathfrak{S}_B,\ \mathfrak{y} \in \mathfrak{S}_C A,\ y_k = o(d_k),\ (y_k - y_{k-1}) = o(c_k).$$

Beweis: Man unterscheidet die Fälle $\chi(A) \neq 0$ und $\chi(A) = 0$.

a) $(\chi(A) \neq 0)$ Nach 5.7b und 3.5 ist $\mathfrak{x}$ in $[\mathfrak{S}_C A \cap \mathfrak{C} \cap \mathfrak{D}]$ (Bezeichnungen wie in 5.7) Berührpunkt von $\mathfrak{S}_C \cap \mathfrak{C}$. Dies gilt aber nicht in $[\mathfrak{S}_B]$, denn in $[\mathfrak{S}_B]$ ist $\mathfrak{S}_C$ ein abgeschlossener Unterraum. Daher gilt nach 4.5a nicht

$$\mathfrak{S}_B \geqq \mathfrak{S}_C A \cap \mathfrak{C} \cap \mathfrak{D},$$

was gleichbedeutend mit der Behauptung ist.

b) $(\chi(A) = 0)$ Nach 5.7c und 3.5 ist mindestens eine der Stellen $\mathfrak{e}_k^*$ in $[\mathfrak{S}_C A \cap \mathfrak{C} \cap \mathfrak{D}]$ enthalten und dort Berührpunkt von $\mathfrak{S}_N \cap \mathfrak{C}$. Die betreffende Stelle ist aber in $[\mathfrak{S}_B]$ nicht Berührpunkt von $\mathfrak{S}_N \cap \mathfrak{C}$. Man schließt wie oben weiter.

Im Falle b) wurde die Voraussetzung „Es gibt ein $\mathfrak{x}$ mit den Eigenschaften ..." gar nicht gebraucht.

Die letzten Sätze lassen sich zum Beweis von Umkehrsätzen verwenden. Will man z. B. zeigen, daß eine konvergenztreue Matrix A keine divergenten Folgen limitiert, so genügt es zu zeigen, daß sie keine unbeschränkten Folgen limitiert.

Eine andere Anwendung ist

Satz 7.3 (*o*-Umkehrsätze). *Mit T_1) bzw. T_2) seien folgende Tauber-sätze bezeichnet* (vgl. Lorentz [11]):

T_1) Ist $(x_k - x_{k-1}) = o(c_k)$ und $A(\mathfrak{x}) \in \mathfrak{S}_C$, so ist $\mathfrak{x} \in \mathfrak{S}_C$

T_2) Ist $(x_k - x_{k-1}) = o(c_k)$ und $A(\mathfrak{x}) \in \mathfrak{S}_C$, so ist $\mathfrak{x} \in \mathfrak{S}_B$ $\quad (0 \leqq c_k \leqq \infty)$.

Die Behauptung lautet nun: Bei einer konvergenztreuen Matrix folgt T_1) aus T_2).

Beweis: Ist (14) aus § 5 nicht erfüllt, so gelten T_1) und T_2) trivialerweise für jede konvergenztreue Matrix A. Ist (14) erfüllt und gilt T_1) nicht für eine gewisse konvergenztreue Matrix A, so gibt es eine Stelle $\mathfrak{x}$ mit den Eigenschaften

$$\mathfrak{x} \in \mathfrak{S}_C A, \quad \mathfrak{x} \bar{\in} \mathfrak{S}_C, \quad (x_k - x_{k-1}) = o(c_k).$$

Wegen 7.2 (man setzt dort etwa $d_k = \infty$ für alle k) kann man $\mathfrak{x} \bar{\in} \mathfrak{S}_B$ annehmen. $\mathfrak{x}$ ist dann auch ein Gegenbeispiel zu T_2).

§ 8.

Inäquivalenzsätze.

Satz 8.1 (Summe von Matrixverfahren). *Gegeben seien endlich oder abzählbar viele Matrixverfahren $A^{(i)}$, unter denen sich kein stärkstes befindet. Dann gibt es keine Matrix A, die dasselbe Wirkfeld hat wie die „Summe" dieser Matrixverfahren, für die also $\mathfrak{S}_C A = \bigcup \mathfrak{S}_C A^{(i)}$ gilt.*

Beweis: Die (FK)-Räume $\mathfrak{S}_C A^{(i)}$ genügen den Bedingungen des Satzes 4.6. Also ist $\bigcup \mathfrak{S}_C A^{(i)}$ kein (FK)-Raum, während für jede Matrix A $\mathfrak{S}_C A$ ein (FK)-Raum ist.

Satz 8.2 (Summe schwächerer Verfahren). *A und $A^{(i)}$ $(i = 0, 1, \ldots)$ seien Matrizen; jede Matrix $A^{(i)}$ sei schwächer als A. Dann ist auch die „Summe" der Verfahren $A^{(i)}$ schwächer als A, d. h. es ist*

$$\bigcup_i \mathfrak{S}_C A^{(i)} < \mathfrak{S}_C A.$$

Beweis: Siehe 8.1.

Für den nächsten Satz wird die Definition des sogenannten C_∞-Verfahrens benötigt (vgl. V. Garten, K. Knopp [8]):

Mit $C^{(r)}$ $(r = 0, 1, \ldots)$ bezeichnet man die Matrizen mit den Elementen

$$c_{n\,k}^{(r)} = \begin{cases} \binom{n-k+r-1}{n-k} \Big/ \binom{n+r}{n} & (0 \leqq k \leqq n) \\ 0 & (k > n). \end{cases}$$

Bei vorgelegter Folge $\{x_k\}$ bildet man

$$c_n^{(r)} = c_n^{(r)}(x_k) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{nk}^{(r)} x_k .$$

Gilt nun die Beziehung

$$\lim_{r\to\infty} \overline{\lim_{n\to\infty}} \operatorname{Re} c_n^{(r)} = \lim_{r\to\infty} \overline{\lim_{n\to\infty}} \operatorname{Re} c_n^{(r)} = \operatorname{Re} y \neq \pm\infty$$

und eine entsprechende Beziehung für die Imaginärteile, so sagt man: Das C_∞-Verfahren limitiert die Folge $\{x_k\}$ zum Werte y.

Satz 8.3 (Inäquivalenzsatz des C_∞-Verfahrens). *Es gibt kein Matrixverfahren A, das dasselbe Wirkfeld wie das C_∞-Verfahren hat. Es gibt auch keine Folge von Matrizen $A^{(n)}$ derart, daß $\bigcap \mathfrak{S}_C A^{(n)}$ gleich dem Wirkfeld des C_∞-Verfahrens ist.*

Beweis: Für jedes $r = 0, 1, \ldots$ sei mit $\mathfrak{F}^{(r)}$ die Menge derjenigen Folgen aus dem Wirkfeld des C_∞-Verfahrens bezeichnet, für die gilt

$$\overline{\operatorname{fin}}_{n=0,1,\ldots} |c_n^{(r)}| < \infty .$$

$\mathfrak{F}^{(r)}$ ist ein (FK)-Raum mit der definierenden Quasinorm

$$(1) \qquad \overline{\operatorname{fin}}_{n=0,1,\ldots} |c_n^{(r)}| .$$

Dies folgt so: $\mathfrak{S}_B C^{(r)}$ ist mit der definierenden Quasinorm (1) ein (FK)-Raum. $\mathfrak{F}^{(r)}$ ist ein linearer Unterraum in $\mathfrak{S}_B C^{(r)}$. Die Stellen aus $\mathfrak{F}^{(r)}$ sind dadurch ausgezeichnet, daß die Zahlen

$$\varepsilon_\varrho = \overline{\lim_{m,n\to\infty}} |c_m^{(\varrho)} - c_n^{(\varrho)}| \qquad (\varrho = r, r+1, \ldots)$$

eine Nullfolge bilden. Aus bekannten Eigenschaften der Matrizen $C^{(r)}$ ergibt sich

$$\varepsilon_\varrho \leqq 2 \cdot \overline{\operatorname{fin}}_{n=0,1,\ldots} |c_n^{(r)}| \qquad (\underline{x} \in \mathfrak{S}_B C^{(r)};\ \varrho = r, r+1, \ldots) .$$

$\mathfrak{F}^{(r)}$ ist also abgeschlossen in $[\mathfrak{S}_B C^{(r)}]$ und daher ein (FK)-Raum.

Das Wirkfeld des C_∞-Verfahrens ist gleich der Vereinigung der $\mathfrak{F}^{(r)}$; die $\mathfrak{F}^{(r)}$ genügen den Voraussetzungen von 4.6. Das Wirkfeld des C_∞-Verfahrens ist also kein (FK)-Raum, woraus die Behauptung folgt. —

Entsprechende Sätze gelten für das E_∞-Verfahren usw.

§ 9.

Schlußbemerkungen.

Mit den in §§ 6—8 genannten Sätzen sind die Anwendungen der Theorie der (FK)-Räume natürlich nicht erschöpft. U. a. kann man

statt der hier behandelten Transformationen der Form $\mathfrak{S}_C A$ solche der Form $\mathfrak{U}_A A$ usw. behandeln. Ferner besteht die Möglichkeit, für die bei Matrixtransformationen auftretenden Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} x_k$ andere Konvergenzbegriffe (absolute Konvergenz, C_1-Summierbarkeit usw.) zu verwenden.

Satz 4. 4 bietet eine wertvolle Hilfe bei der Ermittlung von Konvergenzfaktoren und allgemeiner zur Aufstellung von notwendigen und hinreichenden Bedingungen für Matrizen, die gewisse Abbildungen, etwa $\mathfrak{S}_C \to \mathfrak{S}_C$, durchführen.

Die Sätze lassen sich z. T. auch übertragen auf Koordinatenräume, die nicht (FK)-Räume sind, aber diesen verwandt. In erster Linie kommen hier Räume in Frage, deren lineare Hülle ein (FK)-Raum ist (z. B. der Raum der monotonen, konvergenten Folgen) oder die Vereinigung von (FK)-Räumen sind (wie z. B. viele Räume von Mehrfachfolgen).

Andererseits kann man manche Sätze dieser Arbeit auf andere Art beweisen. Dies sei an folgendem Beispiel erläutert:

Satz: *Limitiert eine permanente Matrix A eine beschränkte, divergente Folge $\mathfrak{x}$ zu Null, so auch eine unbeschränkte.*

Beweise: I. Man setzt

$$\mathfrak{x}^{(r)} = \{x_0, \ldots, x_r, 0, \ldots\} \qquad (r = 0, 1, \ldots).$$

Dann gilt

$$f(\mathfrak{x}^{(r)} - \mathfrak{x}) \to 0 \qquad (r \to \infty)$$

für jedes lineare, stetige Funktional f in $[\mathfrak{S}_C A]$ („schwache Konvergenz"). Aus 3. 5 folgt nun, daß $\mathfrak{x}$ Berührpunkt von $\mathfrak{S}_N$ ist. (Man kann auch explizit Stellen $\mathfrak{y}^{(r)}$ angeben, die gegen $\mathfrak{x}$ konvergieren). Wie in 7. 2 vollendet man den Beweis.

II. In der Form

$$\sum_{r=0}^{\infty} a_r (\mathfrak{x}^{(r)} - \mathfrak{x}) \quad [\mathfrak{S}_K]$$

kann man zahlreiche beschränkte und unbeschränkte A-limitierbare Folgen angeben.

III. Mit einer Verallgemeinerung einer Methode von Agnew [1] stellt man fest, daß A alle Folgen der Form $\{w_k x_k\}$ limitiert, wo die w_k gewisse Bedingungen folgender Art erfüllen:

$$\max_{p_r \leq k, l \leq q_r} |w_k - w_l| \to 0 \qquad (r \to \infty),$$

$$w_k = o(x_k).$$

Unter den Folgen $\{w_k d_k\}$ gibt es unbeschränkte.

Bei vorgelegter Folge $\{x_k\}$ bildet man

$$c_n^{(r)} = c_n^{(r)}(x_k) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{nk}^{(r)} x_k .$$

Gilt nun die Beziehung

$$\lim_{r\to\infty} \overline{\lim_{n\to\infty}} \operatorname{Re} c_n^{(r)} = \lim_{r\to\infty} \overline{\lim_{n\to\infty}} \operatorname{Re} c_n^{(r)} = \operatorname{Re} y \neq \pm\infty$$

und eine entsprechende Beziehung für die Imaginärteile, so sagt man: Das C_∞-Verfahren limitiert die Folge $\{x_k\}$ zum Werte y.

Satz 8.3 (Inäquivalenzsatz des C_∞-Verfahrens). *Es gibt kein Matrixverfahren A, das dasselbe Wirkfeld wie das C_∞-Verfahren hat. Es gibt auch keine Folge von Matrizen $A^{(n)}$ derart, daß $\bigcap \mathfrak{S}_c A^{(n)}$ gleich dem Wirkfeld des C_∞-Verfahrens ist.*

Beweis: Für jedes $r = 0, 1, \ldots$ sei mit $\mathfrak{F}^{(r)}$ die Menge derjenigen Folgen aus dem Wirkfeld des C_∞-Verfahrens bezeichnet, für die gilt

$$\overline{\operatorname{fin}}_{n=0,1,\ldots} |c_n^{(r)}| < \infty .$$

$\mathfrak{F}^{(r)}$ ist ein (FK)-Raum mit der definierenden Quasinorm

$$(1) \qquad \overline{\operatorname{fin}}_{n=0,1,\ldots} |c_n^{(r)}| .$$

Dies folgt so: $\mathfrak{S}_B C^{(r)}$ ist mit der definierenden Quasinorm (1) ein (FK)-Raum. $\mathfrak{F}^{(r)}$ ist ein linearer Unterraum in $\mathfrak{S}_B C^{(r)}$. Die Stellen aus $\mathfrak{F}^{(r)}$ sind dadurch ausgezeichnet, daß die Zahlen

$$\varepsilon_\varrho = \overline{\lim_{m,n\to\infty}} |c_m^{(\varrho)} - c_n^{(\varrho)}| \qquad (\varrho = r, r+1, \ldots)$$

eine Nullfolge bilden. Aus bekannten Eigenschaften der Matrizen $C^{(r)}$ ergibt sich

$$\varepsilon_\varrho \leqq 2 \cdot \overline{\operatorname{fin}}_{n=0,1,\ldots} |c_n^{(r)}| \qquad (\mathfrak{x} \in \mathfrak{S}_B C^{(r)};\ \varrho = r, r+1, \ldots) .$$

$\mathfrak{F}^{(r)}$ ist also abgeschlossen in $[\mathfrak{S}_B C^{(r)}]$ und daher ein (FK)-Raum.

Das Wirkfeld des C_∞-Verfahrens ist gleich der Vereinigung der $\mathfrak{F}^{(r)}$; die $\mathfrak{F}^{(r)}$ genügen den Voraussetzungen von 4.6. Das Wirkfeld des C_∞-Verfahrens ist also kein (FK)-Raum, woraus die Behauptung folgt. —

Entsprechende Sätze gelten für das E_∞-Verfahren usw.

§ 9.

Schlußbemerkungen.

Mit den in §§ 6—8 genannten Sätzen sind die Anwendungen der Theorie der (FK)-Räume natürlich nicht erschöpft. U. a. kann man

statt der hier behandelten Transformationen der Form $\mathfrak{S}_C A$ solche der Form $\mathfrak{U}_A A$ usw. behandeln. Ferner besteht die Möglichkeit, für die bei Matrixtransformationen auftretenden Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} x_k$ andere Konvergenzbegriffe (absolute Konvergenz, C_1-Summierbarkeit usw.) zu verwenden.

Satz 4. 4 bietet eine wertvolle Hilfe bei der Ermittlung von Konvergenzfaktoren und allgemeiner zur Aufstellung von notwendigen und hinreichenden Bedingungen für Matrizen, die gewisse Abbildungen, etwa $\mathfrak{S}_C \to \mathfrak{S}_C$, durchführen.

Die Sätze lassen sich z. T. auch übertragen auf Koordinatenräume, die nicht (FK)-Räume sind, aber diesen verwandt. In erster Linie kommen hier Räume in Frage, deren lineare Hülle ein (FK)-Raum ist (z. B. der Raum der monotonen, konvergenten Folgen) oder die Vereinigung von (FK)-Räumen sind (wie z. B. viele Räume von Mehrfachfolgen).

Andererseits kann man manche Sätze dieser Arbeit auf andere Art beweisen. Dies sei an folgendem Beispiel erläutert:

Satz: *Limitiert eine permanente Matrix A eine beschränkte, divergente Folge $\mathfrak{x}$ zu Null, so auch eine unbeschränkte.*

Beweise: I. Man setzt

$$\mathfrak{x}^{(r)} = \{x_0, \ldots, x_r, 0, \ldots\} \qquad (r = 0, 1, \ldots).$$

Dann gilt

$$f(\mathfrak{x}^{(r)} - \mathfrak{x}) \to 0 \qquad (r \to \infty)$$

für jedes lineare, stetige Funktional f in $[\mathfrak{S}_C A]$ („schwache Konvergenz"). Aus 3. 5 folgt nun, daß $\mathfrak{x}$ Berührpunkt von $\mathfrak{S}_N$ ist. (Man kann auch explizit Stellen $\mathfrak{y}^{(r)}$ angeben, die gegen $\mathfrak{x}$ konvergieren). Wie in 7. 2 vollendet man den Beweis.

II. In der Form

$$\sum_{r=0}^{\infty} a_r (\mathfrak{x}^{(r)} - \mathfrak{x}) \quad [\mathfrak{S}_K]$$

kann man zahlreiche beschränkte und unbeschränkte A-limitierbare Folgen angeben.

III. Mit einer Verallgemeinerung einer Methode von Agnew [1] stellt man fest, daß A alle Folgen der Form $\{w_k x_k\}$ limitiert, wo die w_k gewisse Bedingungen folgender Art erfüllen:

$$\operatorname*{Max}_{p_r \leq k, l \leq q_r} |w_k - w_l| \to 0 \qquad (r \to \infty),$$

$$w_k = o(x_k).$$

Unter den Folgen $\{w_k d_k\}$ gibt es unbeschränkte.

Mit diesen drei Methoden kann man u. a. alle Sätze des § 7 beweisen — sogar mit Verschärfungen — sowie die oben erwähnte Erweiterung von 6. 4.

Zum Schluß einige historische Bemerkungen: Ähnliche Sätze wie 6. 3, 6. 4 und 7. 1 wurden von Mazur [12], Banach [2] und Hill [10] bewiesen unter der Voraussetzung, daß die dort auftretende Matrix A permanent und reversibel ist. Mazur und Orlicz [13] veröffentlichten mehrere Sätze über allgemeine Limitierungsverfahren, in denen die Reversibilität nicht vorausgesetzt wird; aber sie brachten keine Beweise. Einige ihrer Sätze sind in verallgemeinerter Form in dieser Arbeit enthalten (6. 2, 6. 3, 6. 4, 7. 1), die übrigen lassen sich auch leicht mit der Theorie der (FK)-Räume beweisen. Mit (F)-Räumen beschäftigten sich Mazur und Orlicz [14] (diese Arbeit wurde schon von Eidelheit [7] angekündigt) sowie Dieudonné und Schwartz ([5], [6]).

Literaturverzeichnis.

R. P. Agnew.

[1] Convergence fields of methods of summability. Annals of Math. 46, 93—101 (1945).

S. Banach.

[2] Théorie des opérations linéaires. Warschau 1932.

N. Bourbaki.

[3] Topologie générale. Paris, 1940—1949.

A. Brudno.

[4] Summation of bounded sequences by matrices. Rec. Math. (Mat. Sbornik) N. S. 16 (58), 191—247 (1945).

J. Dieudonné.

[5] La dualité dans les espaces vectoriels topologiques. Ann. sci. École norm. sup. (3) 59, 107—139, (1942).

J. Dieudonné, L. Schwartz.

[6] La dualité dans les espaces (F) et (LF). Ann. Inst. Fourier I, 61—101 (1950).

M. Eidelheit.

[7] Zur Theorie der Systeme linearer Gleichungen. Stud. Math. 6, 139—148 (1936).

V. Garten, K. Knopp.

[8] Ungleichungen zwischen Mittelwerten von Zahlenfolgen und Funktionen Math. Z. 42, 365—388 (1937).

H. Hahn.

[9] Über Folgen linearer Operationen. Monatsh. Math. 32, 3—88 (1922).

J. D. Hill.

[10] Some properties of summability. Bull. Amer. Math. Soc. 50, 227—230 (1944).

G. G. Lorentz.
[11] Tauberian theorems and Tauberian conditions. Trans. Amer. Math Soc. 63, 226—234 (1948).

S. Mazur.
[12] Eine Anwendung der Theorie der Operationen bei der Untersuchung der Toeplitz'schen Limitierungsverfahren. Stud. Math. 2, 40—50 (1930).

S. Mazur, W. Orlicz.
[13] Sur les méthodes linéaires de sommation. C. R. Acad. Sci. 196, 32—34 (1933).

S. Mazur, W. Orlicz.
[14] Sur les espaces métriques linéaires (I). Stud. Math. 10, 184—208 (1948)

Von den Arbeiten [4], [5], [10] und [14] war dem Verfasser nur ein Referat zugänglich.

Zusatz bei der Korrektur: In zwei Arbeiten hat A. Wilansky ähnliche Sätze wie 6.3 und 7.1 für konvergenztreue, umkehrbare Matrizen bewiesen:

A. Wilansky.
A necessary and sufficient condition that a summability method be stronger than convergence. Bull. Amer. Math. Soc. 55, 914—916 (1949).

A. Wilansky.
An application of Banach linear functionals to summability. Trans. Amer. Math. Soc. 67, 59—68 (1949).

(Eingegangen am 30. September 1950.)

Mathematische Zeitschrift, Band 53, Heft 5, S. 488 (1951).

Nachtrag zu der Arbeit von H. Kneser:

„Die Potenzreihe der reziproken Gammafunktion" (Band **52** (1950), S. 655).

In der genannten Arbeit hatte ich Anlaß zu zeigen, daß eine bestimmte unter den Wurzeln z der Gleichung $z e^z = -n$ bei großem positivem n durch eine konvergente Doppelpotenzreihe in $1/\log n$ und $\log\log n/\log n$ dargestellt wird. Ich hatte dabei übersehen, daß diese Reihenentwicklung — nur ohne die zahlenmäßige Angabe der ersten Beiwerte — schon von Herrn H. Schmidt (Jahresber. d. DMV 49 (1939), *7—9*; Lösung der Aufgabe 248) abgeleitet worden ist. Herr Schmidt gibt dort auch die entsprechenden Entwicklungen für die anderen Wurzeln der Gleichung, die für meinen Zweck nicht gebraucht wurden.

(Eingegangen am 26. Juli 1950.)